

Es gibt keine (lokal-realistische) Alternative zur Quantentheorie

Daniel Zeuch

24. Juli 2008

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Ein EPR-Experiment	3
3	Aufstellung und Widerlegung klassischer Theorien	5
3.1	Rückführung auf klassische Betrachtung	6
3.2	Lokaler Realismus	6
3.3	Greenberger, Horne und Zeilinger	8
4	Neues Verschränkungsmerkmal	9
4.1	CHSH-Ungleichung	9
4.2	Separable Quantengemische und Verschränkung	10

1 Einleitung

Im Jahr 1935 haben Albert Einstein, Boris Podolsky und Nathan Rosen einen Artikel im *Physical Review* veröffentlicht unter folgendem Namen: „*Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*“ In diesem kommen sie zu dem Schluss „[...] *that the wave function does not provide a complete description of the physical reality*[...]“, sprich, die Quantenmechanik ist nicht komplett.

Zwei entscheidende Grundannahmen der Autoren sind:

1.) Einstein-Realität Physikalische Größen, deren Werte sich vor einer Messung prinzipiell und ohne das System zu stören voraussagen lassen, müssen als physikalische Eigenschaften eines Systems in einer vollständigen Theorie enthalten sein.

2.) Einstein-Lokalität Räumlich getrennte und nicht wechselwirkende Systeme I und II haben keinen Einfluss aufeinander, die Physik kann lokal beschrieben werden. Insbesondere übt sich eine Messung in I nicht auf die Eigenschaften von II aus.

Die Argumentation der Autoren beginnt mit der Betrachtung zweier Operatoren A und B , welche nicht kommutieren,

$$[A, B] \neq 0. \quad (1)$$

Da die gleichzeitige Kenntnis beider Observablenmesswerte laut Quantentheorie nicht möglich ist, lässt sich schließen, dass nur eine folgender Aussagen wahr sein kann.

- (1) Keine gleichzeitige Realität der Messgrößen von A und B

oder

- (2) Unzureichende Beschreibung der Realität durch die Quantenmechanik

Die nachfolgende Argumentation beruht nun auf zwei physikalischen Teilchen I und II, welche für eine gewisse Zeit miteinander wechselwirkten. Ihr gemeinsamer Zustand nach der Wechselwirkung kann, sofern die beiden Einzelzustände vor dem Wechselwirken bekannt waren, durch eine gemeinsame Wellenfunktion beschrieben werden:

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(x_2) u_s(x_1)$$

Hierbei sind $u_s(x_1)$ die Eigenzustände eines Operators, der auf System 1 wirkt. Die Autoren zeigen nun, wie in untenstehender Abbildung angedeutet ist, das Folgendes: Wendet man auf System I den Orts- (Impuls-) Operator an, so fällt das zweite System in einen Orts- (Impuls-) Eigenzustand.

Damit liegen Orts- und Impulszustand nach der jeweiligen Messung in System I auch in System II als scharfe Werte fest. Da aber nach der *Einstein-Lokalität* eine Messung in I nichts an

Teilchen 1		Teilchen 2	
①		②	
P_1 ①	\Rightarrow	②	ist Eigenzustand von P_2
x_1 ①	\Rightarrow	②	ist Eigenzustand von x_2

II geändert hat, mussten die Größen Ort und Impuls schon vor der Messung festliegen. Denn sie lassen sich voraussagen, bevor man eine Messung durchführt ohne das System zu stören. Diese Erkenntnis allerdings stellt eine widersprüchliche Aussage zur Quantenmechanik dar, nach welcher Gleichung (1) so interpretiert wird, dass die Messgrößen zu A und B gerade *nicht* gleichzeitig existieren.

Es scheint nun der Fall zu sein, dass die Quantenmechanik tatsächlich nicht vollständig ist. Möglicherweise lässt sich die Welt auch nicht-quantentheoretisch, also klassisch beschreiben, nach den Prinzipien (1) und (2), wie sie zu Beginn genannt wurden. Da Einstein und Kollegen aber keine Alternativtheorie vorgeschlagen haben, sondern die Existenz lediglich vermuten, sollen in dieser Arbeit sogenannte lokal-realistische Theorien aufgestellt und falsifiziert werden. Daraus erhalten wir dann eine neue Beschreibung der Verschränkung.

2 Ein EPR-Experiment

Da wir jetzt wissen, wo der Ursprung dieser Überlegung, die Welt klassisch zu beschreiben, liegt, betrachten wir jetzt ein EPR-Experiment. Es werden an einem Ort paarweise verschränkte Photonen erzeugt, welche in entgegengesetzte Richtungen entlang der z -Achse fliegen.

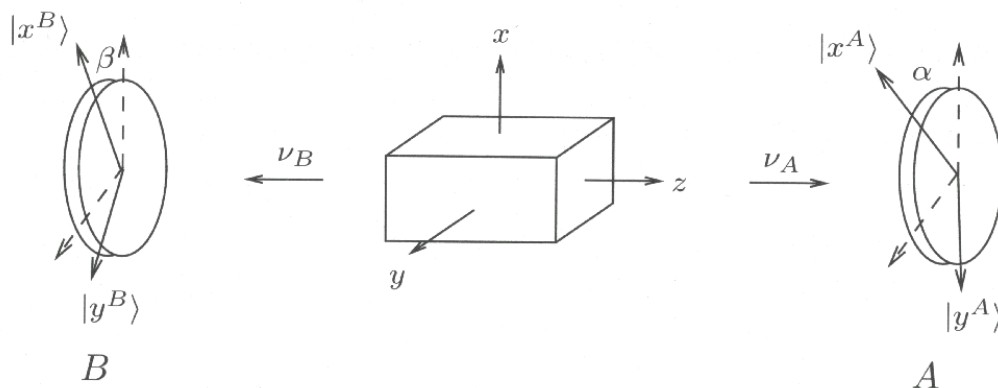
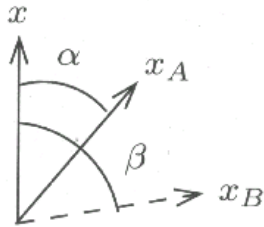


Abbildung 1: Schema der Photonenmessung

Diese seien im rotationssymmetrischen Bell-Zustand:

$$|\Phi^{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|x^A, x^B\rangle + |y^A, y^B\rangle \right),$$

dabei sind $|x\rangle$ und $|y\rangle$ die jeweilige lineare Polarisation in x - und y -Richtung.



An den Orten A und B, wie im Bild oben zu sehen ist, werden die Polarisationen der Photonen gemessen. Dabei ist die x^A -Achse um einen Winkel α zur x -Achse gedreht, x^B um β gedreht. Gleiches gilt für die y^A - sowie die y^B -Achse. Den Messungen werden nun Ergebnisse ± 1 zugeordnet, +1 beispielsweise für die x -Polarisation:

Polarisation	x^A	y^A	x^B	y^B
Messwert	+1	-1	+1	-1

Uns interessiert jetzt die Korrelation der beiden Ergebnisse. Dazu bestimmen wir zunächst die Wahrscheinlichkeit, bezeichnet mit P , zwei bestimmte Ergebnisse zu erhalten. P_{+-} ist zum Beispiel die Wahrscheinlichkeit, x_A bei A und y_B bei B zu messen, sie berechnet sich wie folgt:

$$P_{++} = P_{--} = \langle \Phi^{AB} | x^A x^B \rangle \langle x^A x^B | \Phi^{AB} \rangle = \frac{1}{2} \cdot \cos^2(\beta - \alpha)$$

$$P_{+-} = P_{-+} = \frac{1}{2} \cdot \sin^2(\beta - \alpha)$$

Bei der Berechnung wurden die linearen Polarisationen benutzt, welche sich senkrecht zueinander in Abhängigkeit eines Winkels darstellen lassen:

$$|x^A\rangle = \cos \alpha |x\rangle + \sin \alpha |y\rangle,$$

$$|y^A\rangle = -\sin \alpha |x\rangle + \cos \alpha |y\rangle.$$

Nun suchen wir eine bessere Vergleichsgröße der Messergebnisse, welche in Abhängigkeit der eingestellten Winkel bei A und bei B auftreten. Der Korrelationskoeffizient ε^{qu} ist der Erwartungswert der beiden folgenden Observablen-Operatoren, welche die Eigenwerte +1 und -1 haben:

$$E^A = |x^A\rangle \langle x^A| - |y^A\rangle \langle y^A|$$

$$E^B = |x^B\rangle \langle x^B| - |y^B\rangle \langle y^B|.$$

Damit lässt sich ε^{qu} berechnen:

$$\varepsilon^{qu} = \langle E^A \otimes E^B \rangle$$

$$= P_{++} + P_{--} - P_{+-} - P_{-+}$$

$$= \cos 2(\beta - \alpha)$$

An dieser Stelle tritt der rotationssymmetrische Charakter des Bell-Zustandes noch einmal zutage, da der Korrelationskoeffizient (wie auch die Wahrscheinlichkeiten P_{+-} u.s.w.) nur von der Differenz der eingestellten Winkel abhängt. Außerdem sieht man bei gleichen Winkeln α , β , also bei parallelen Achsen x_A , x_B eine vollständige Korrelation der Ergebnisse. Dies ist wegen des Faktors 2 auch der Fall, wenn die Winkel um 180° verdreht sind. Dies ist sehr anschaulich, da die Achsen dann antiparallel zueinander stehen.

3 Aufstellung und Widerlegung klassischer Theorien

Um einen Einblick zu geben, wie Albert Einstein schon 9 Jahre vor seiner Veröffentlichung des EPR-Papers über die Welt der Quanten gedacht hat, sei hier ein Zitat des großen Denkers gezeigt.

Einstein schreibt an Born 1926:

„Die Quantenmechanik ist sehr achtung-gebietend. Aber eine innere Stimme sagt mir, dass das noch nicht der wahre Jakob ist. [...] Jedenfalls bin ich überzeugt, dass *der* [Gott] nicht würfelt.“ [Bi]



Abbildung 2: Einstein in Kalifornien, Februar 1933 [Bi]

3.1 Rückführung auf klassische Betrachtung

Die Messungen im dargestellten Experiment sind unabhängig davon, welche Entfernung A und welche B vom Ursprung der Photonen haben. Sie können unterschiedlich groß sein; natürlich nur, wenn sich die Photonen in beide Richtungen ungehindert fortpflanzen können, also im Vakuum propagieren. Außerdem spielt die Reihenfolge der Messungen keine Rolle, und man weiß bei der besten Korrelation, also bei $\alpha = \beta$, dass das Ergebnis einer B-Messung gleich dem Ergebnis einer A-Messung ist. Misst man in diesem Fall also in A beispielsweise die x_A -Richtung, so weiß man sofort, dass in B die x_B -Richtung gemessen wird.

Man stelle sich folgendes klassische Beispiel vor. Zwei Schuhkartons stehen auf einem Tisch, welche entweder jeweils einen *linken* oder je einen *rechten* Schuh enthalten. Jemand hat also zwei linke oder zwei rechte Schuhe in die Kartons gelegt. Nun tragen zwei Versuchspersonen, die gleich viel wissen wie wir, die Kartons von dem Tisch in entgegengesetzte Richtungen weg. Misst eine der Personen den Schuh, sprich, sie schaut in den Karton, und findet einen linken Schuh, so weiß sie, dass der andere auch einen linken findet. Entsprechendes lässt sich über die andere Person sagen, beziehungsweise über einen entdeckten rechten Schuh. Wieder haben Reihenfolge und Abstand der Messungen keinen Einfluss auf das Ergebnis.

Die Analogie der Beispiele drängt folglich die Frage auf, ob sich der gesamte Prozess der Photonenmessung nicht auch klassisch beschreiben lässt.

3.2 Lokaler Realismus

Wie bereits gesagt glaubten die Autoren Einstein, Podolsky und Rosen nicht an die vollständige Beschreibung der Realität durch die Quantenmechanik. Mit den Konzepten der **Einstein-Realität** und **Einstein-Lokalität** wurde bewiesen, dass dies scheinbar nicht der Fall ist. Deshalb wird jetzt der Versuch unternommen, eine stochastische lokal-realistische Theorie aufzustellen, welche möglichst allgemein gehalten wird und den beiden gerade genannten Grundannahmen genügt. Hierzu ist es manchmal hilfreich, sich ein klassisches Beispiel, etwa das genannte mit den Schuhkartons, vorzustellen.

Dazu führen wir zunächst einen Satz von Parametern λ mit einer Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\lambda)$ ein. λ beschreibt die in diesem Zusammenhang bekannten *verborgenen Parameter*, welche im Fall der Schuhe zum Beispiel die Information enthalten, ob sich linke oder rechte Schuhe im Karton befinden. Erinnern wir uns an die quantenmechanische Messung der Polarisation in A und B, so fällt uns ein, dass die Messergebnisse mit den Zahlen ± 1 in Verbindung gebracht wurden. Dabei trat eine projektive Messung statt, bei welcher der vorherige Zustand verändert wurde. Im klassischen Fall liegen die Werte bereits vor Messung fest, ebenso genau wie der Schuh, welcher schon vor dem Nachschauen ein rechter Schuh war. Die zugehörige Funktion in Abhängigkeit des Ortes (A oder B) und des Winkels (hier mit θ bezeichnet) kann

wieder die Werte ± 1 haben, sie lautet:

$$S_A^\lambda(\theta_1) = \left\{ \begin{array}{c} +1 \\ -1 \end{array} \right\}, \quad S_B^\lambda(\theta_2) = \left\{ \begin{array}{c} +1 \\ -1 \end{array} \right\} \quad (2)$$

Vergleiche zu Quantenmechanischen Ergebnissen erfordern den klassischen Korrelationskoeffizienten, welcher über Spurbildung des Produktes $S_A^\lambda(\theta_1)S_B^\lambda(\theta_2)$ berechnet wird.

$$\varepsilon^{kl}(\theta_1, \theta_2) = \int \rho(\lambda) S_A^\lambda(\theta_1) S_B^\lambda(\theta_2) d\lambda \quad \text{Forderung} \underline{\underline{=}} \text{ bei } \theta_1 = \theta_2 \quad 1 \quad (3)$$

Die Forderung $\varepsilon^{kl}(\theta, \theta) = 1$ entstammt der gut bestätigten Tatsache, dass bei gleichen Winkeln wirklich beste Korrelation der Ergebnisse vorliegt. Aus der Forderung und aus der Tatsache, dass $\rho(\lambda)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist ($\int \rho(\lambda) d\lambda = 1$, $\rho(\lambda) \geq 0$), lässt sich nun schließen:

$$S_A^\lambda(\theta) = S_B^\lambda(\theta) =: S^\lambda(\theta)$$

Wir stellen uns nun drei Messungen mit folgenden Winkelpaaren vor: $(\theta_1, \theta_2), (\theta_2, \theta_3), (\theta_1, \theta_3)$. Dabei wird ein Winkel jeweils für den Ort A, und der andere für B gewählt. Nun schauen wir uns einmal folgenden Term etwas genauer an:

$$S^\lambda(\theta_1)S^\lambda(\theta_2) - S^\lambda(\theta_1)S^\lambda(\theta_3) = \underbrace{S^\lambda(\theta_1)S^\lambda(\theta_2)}_{=\pm 1} \underbrace{[1 - S^\lambda(\theta_2)S^\lambda(\theta_3)]}_{\geq 0}.$$

Integrieren liefert

$$\begin{aligned} & \left| \int \rho(\lambda) [S^\lambda(\theta_1)S^\lambda(\theta_2) - S^\lambda(\theta_1)S^\lambda(\theta_3)] d\lambda \right| \\ &= \left| \int \rho(\lambda) S^\lambda(\theta_1) S^\lambda(\theta_2) [1 - S^\lambda(\theta_2)S^\lambda(\theta_3)] d\lambda \right| \\ &\leq \int \rho(\lambda) \underbrace{|[1 - S^\lambda(\theta_2)S^\lambda(\theta_3)]|}_{\geq 0} d\lambda = 1 - \int \rho(\lambda) S^\lambda(\theta_2) S^\lambda(\theta_3) d\lambda. \end{aligned}$$

Daraus folgt die *Bellsche Ungleichung*:

$$\implies \boxed{|\varepsilon^{kl}(\theta_1, \theta_2) - \varepsilon^{kl}(\theta_1, \theta_3)| \leq 1 - \varepsilon^{kl}(\theta_2, \theta_3)}$$

Ergebnisse gewisser quantenmechanischer Korrelationskoeffizienten, also zu bestimmten zugehörigen Winkeln, *verletzen* die gerade berechnete Ungleichung. Bei $\delta_1 = 60^\circ$, $\delta_2 = 120^\circ$ und $\delta_3 = 180^\circ$ ergibt sich beispielsweise

$$1 \leq \frac{1}{2}.$$

Allerdings lässt sich feststellen: **Experimente bestätigen die Ergebnisse der Quantentheorie!**

3.3 Greenberger, Horne und Zeilinger

Jetzt schauen wir uns ein System an, in welchem drei Spins miteinander verschränkt sind. Sie befinden sich im GHZ-Zustand, welcher nach den Urhebern Greenberger, Horne und Zeilinger benannt ist:

$$|\Psi^{ABC}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_z^A, 0_z^B, 0_z^C\rangle + |1_z^A, 1_z^B, 1_z^C\rangle)$$

Dabei wollen wir bei den Spinobjekten die x- und die y-Komponente messen, an den Orten A, B und C.

Die zugehörigen Messwerte für σ_y^A , σ_y^B und σ_x^C sind s_y^A , s_y^B , s_x^C haben die Messergebnisse +1 und -1. Um allerdings etwas über die Ausgänge solcher Messungen aussagen zu können, schreiben wir $\Psi(ABC)$ als Summe von Eigenvektoren der Pauli-Operatoren $\sigma_{x,y}$:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}(|0_y^A, 1_y^B, 0_x^C\rangle + |1_y^A, 0_y^B, 0_x^C\rangle + |0_y^A, 0_y^B, 1_x^C\rangle + |1_y^A, 1_y^B, 1_x^C\rangle)$$

Weil sich nun in jedem Summanden eine ungerade Anzahl von $|1\rangle$ -Zuständen befindet, erkennt man, dass das Produkt der Messergebnisse als Ergebnis immer -1 hat. Da die Orte natürlich beliebig benannt beziehungsweise vertauscht werden können, kann man schreiben:

$$\begin{aligned} s_y^A s_y^B s_x^C &= -1 \\ s_x^A s_y^B s_y^C &= -1 \\ s_y^A s_x^B s_y^C &= -1 \end{aligned} \tag{4}$$

Auf dem gleichen Weg wie gerade beschrieben, also durch Schreiben des Zustandes als Summe von Eigenvektoren von σ_x^A , σ_x^B und σ_x^C , kann man den Ergebnissen einer xxx-Messung folgende Relation zuordnen:

$$s_x^A s_x^B s_x^C = +1 \tag{5}$$

Nun soll auch dieser Versuch einmal klassisch, also aus Sicht des lokalen Realismus, gedeutet werden. Das Vorliegen der Spinwerte vor der Messung erlaubt uns zu sagen, dass die Werte für s_y und s_x in den Gleichungen (4) alle dieselben sind. Dies hängt damit zusammen, dass egal wo welche Polarisation gemessen wird, die Messungen (klassisch gesehen) keinen Einfluss aufeinander haben.

Es gilt also nun:

$$s_y^A s_y^A = s_y^B s_y^B = s_y^C s_y^C = 1.$$

Dann kann man aus derselben Gleichung alle Produkte miteinander multiplizieren, wobei eine

-1 als Ergebnis herauskommt. Jetzt folgt:

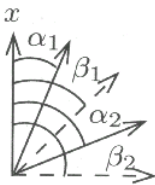
$$s_y^A s_y^B s_x^C \cdot s_x^A s_y^B s_y^C \cdot s_y^A s_x^B s_y^C = s_x^A s_x^B s_x^C = -1$$

Dies ist offensichtlich ein Widerspruch zu Gleichung (5). Doch auch hier lässt sich die Quantentheorie durch experimentelle Ergebnisse sehr gut bestätigen!

4 Neues Verschränkungsmerkmal

4.1 CHSH-Ungleichung

Kommen wir nun noch einmal auf die Messung der Photonen zurück, welche im zweiten Kapitel eingeführt wurde.



Es soll hier eine weitere Photonenmessung angeschaut werden, mit je zwei Winkeln an jedem Ort. Bei A wird also mit den Winkeln α_1 und α_2 gemessen, bei B mit β_1 und β_2 . In dieser Konstellation erübrigt sich die Bedingung, welche wir in Gleichung (3) benutzt haben. Auch hier wollen wir wieder eine klassische Messung haben und gehen damit von einer lokal-realistischen Anschauung aus. Wir benutzen deshalb die schon früher in

Gleichung (2) eingeführte klassische Messwertfunktion S_A^λ , die vom eingestellten Winkel abhängt. Erneut kann man eine Gleichung aufstellen, welche eine interessante Ungleichung zur Folge hat:

$$S_A^\lambda(\alpha_2) \cdot \underbrace{[S_B^\lambda(\beta_1) + S_B^\lambda(\beta_2)]}_{\pm 2} + S_A^\lambda(\alpha_1) \cdot \underbrace{[S_B^\lambda(\beta_1) - S_B^\lambda(\beta_2)]}_{\pm 2} =: U$$

Da in beiden Fällen das Ergebnis der eckigen Klammern mit ± 1 multipliziert wird, lässt sich der Betrag der Gleichung angeben:

$$U = \pm 2.$$

Der Betrag des klassischen Mittelwertes von U lässt sich damit berechnen:

$$\left| \int \rho U d\lambda \right| \leq \int |\rho U| d\lambda = 2 \int \rho d\lambda = 2$$

Durch Ausmultiplizieren der Terme in U und Einsetzen in die gerade gewonnene Ungleichung ergibt sich die *CHSH-Ungleichung*

$$\boxed{|\varepsilon^{kl}(\alpha_2, \beta_1) + \varepsilon^{kl}(\alpha_2, \beta_2) + \varepsilon^{kl}(\alpha_1, \beta_1) - \varepsilon^{kl}(\alpha_1, \beta_2)| \leq 2}$$

Diese Ungleichung hilft uns im Folgenden, quantenmechanische Verschränkung etwas besser zu verstehen.

4.2 Separable Quantengemische und Verschränkung

Man erinnert sich daran, dass nicht verschränkte Gemische von 2-Teilchen-Zuständen durch einen Dichteoperator ρ^{AB} beschrieben werden können.

Dabei gelten $0 \leq \lambda_i \leq 1$, sowie $\sum_i \lambda_i = 1$. Damit kann der quantentheoretische Korrelationskoeffizient durch Spurbildung berechnet werden:

$$\begin{aligned}\rho^{AB} &= \sum_i \lambda_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B \\ \Rightarrow E^{AB} &= \text{tr}_{AB}(\rho^{AB} E^A E^B) = \sum_i \lambda_i (\text{tr}_A \rho_i^A E^A) (\text{tr}_B \rho_i^B E^B)\end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass nicht verschränkte Gemische die CHSH-Ungleichung erfüllen. Eine Regel, die daraus ableitbar ist, könnte wie folgt lauten:

Zustand nicht verschränkt \Leftrightarrow Zustand klassisch beschreibbar

Etwas allgemeiner gilt auch das Folgende. Für verschränkte Zustände lässt sich immer eine klassische Ungleichung finden, die nicht erfüllt ist.

Die neu gewonnene Erkenntnis dieses Kapitels besteht also darin, dass sich Verschränkung bei physikalischen Systemen gegen eine komplette klassische Beschreibung wehrt.

Literatur

- [EPR] A. Einstein, B. Podolsky und H. Rosen *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, Phys. Rev. 47, 777-780 (1935).
- [JA] Jürgen Audretsch: *Verschränkte Systeme*, Weinheim : WILEY-VHC2005
- [Bi] Jürgen Neffe: *Einstein - Eine Biographie*, 7. Auflage, Reinbek bei Hamburg : Rowohlt, April 2005