Gemischter Zustand und Dichteoperator

Quanteninformationstheorie-Seminar

Marcel Wunram

Universität Konstanz

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

In dem Vortrag zum Thema „Gemischter Zustand und Dichteoperator“ soll erst eine andere Darstellung des reinen Zustandes eingeführt werden - der Dichteoperator des reinen Zustandes. Mit dessen Hilfe wird ein statistisches Gemisch beschreiben werden was letztlich zur Verallgemeinerung des Dichteoperators zur Beschreibung des allgemeinen Quantenzustand führt. Außerdem wird die Beschreibung zur Verallgemeinerung des Messpostulates führen.

1 Der reine Zustand

1.1 Reiner Zustand als Dichteoperator

Bisher haben wir für den reinen Zustand die Darstellung eines normierten *Zustandvektors* $|\psi\rangle$ im Hilbert-Raum gewählt. Nun soll die Beschreibung auf ein anderes Konzept, dem Dichteoperator ρ aufgeweitet werden. Dabei definieren wird

$$\rho := |\psi\rangle \langle\psi|$$

er hat folgenden Eigenschaften:

(i) ρ ist positiv $\Rightarrow \rho^\dagger = \rho$ (hermitesch)

(ii) $\mathrm{Sp}\,[\rho] = 1$ als Folge der Normiertheit von $|\psi\rangle$

(iii) $\rho^2 = \rho \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Sp}\left[\rho^2\right] = 1$

Dabei bedeutet die Positivität von ρ, dass alle Eigenwerte größer eins sind und unter anderem ermöglicht die Hermitizität eine Spektralzerlegung des Operators.
Der Grund der Einführung eines Dichteoperators liegt darin, dass man damit eine Darstellung findet, die zur Beschreibung eines allgemeinen Quantenzustandes dient. Das dies tatsächlich der Fall ist, wird sich innerhalb dieses Vortrages herausstellen.

1.2 Äquivalente Beschreibung von Zustandsvektor und Dichteoperator

Zunächst soll überprüft werden, ob sich die Beschreibung eines reinen Zustandes sowohl über den Zustandsvektor, als auch über einen Dichteoperator realisieren lässt. Dabei orientieren wir uns an dem Vorgehen bei reinen Zuständen in abgeschlossenen Quantensystemen und übertragen diese auf den Dichteoperator.
Bei der Messung einer Observablen A mit dem Messergebnis a_n und dem dazugehörigem Projektionsoperator

$$P_n := \sum_{i=1}^{g_n} \left|u_n^i\right\rangle \left\langle u_n^i\right| \qquad \text{mit } g_n \text{ als Entartungsgrad von } a_n$$

ergibt sich für den unnormierten Zustandsvektor $\left|\tilde{\psi}'_n\right\rangle$ durch die Projektion von $|\psi\rangle$ in den Raum der Eigenvektoren zu a_n.

$$|\psi\rangle \to \left|\tilde{\psi}'_n\right\rangle = P_n |\psi\rangle$$

Überträgt man dies auf den Dichteoperator, so folgt:

$$\rho \to \rho'_n = \frac{1}{p(a_n)} P_n \rho P_n$$

Dabei ist $p(a_n)$ die Wahrscheinlichkeit, den Messwert a_n zu erhalten. Sie ist gleich dem Erwartungswert des Projektionsoperators der Messung.

$$p(a_n) = \langle\psi\,|P_n|\,\psi\rangle = \mathrm{Sp}\,[P_n\rho] \tag{1}$$

Manchmal kann es vorteilhaft sein, die unnormierte Form des Dichteoperators zu verwenden, was durch eine Tilde gekennzeichnet werden soll. Wir definieren:

$$\tilde{\rho}'_n = \left|\tilde{\psi}'_n\right\rangle \left\langle\tilde{\psi}'_n\right| = P_n\rho P_n \tag{2}$$

Dann ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit den Messwert a_n zu messen die Spur des unnormierten Dichteoperators nach einer selektiven Messung:

$$p(a_n) = \mathrm{Sp}\,[\tilde{\rho}'_n]$$

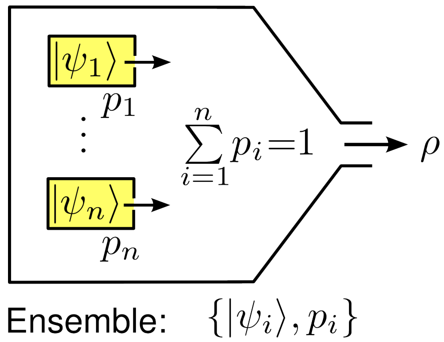
Betrachten wir nun den Erwartungswert $\langle A \rangle$ der Observable A, so erhalten wir durch das Einschieben des Identitätsoperators:

$$\begin{aligned}
\langle A \rangle &= \sum_{j,k=1}^{d} \langle \psi | u_j \rangle \langle u_j | A | u_k \rangle \langle u_k | \psi \rangle && \text{mit } \mathbb{I} = \sum_i |i\rangle \langle i| \\
&= \sum_{j,k} \langle u_k | \rho | u_j \rangle \langle u_j | A | u_k \rangle && \text{da } \rho = |\psi\rangle \langle \psi| \\
&= \sum_{k} \langle u_k | \rho A | u_k \rangle \\
&= \mathrm{Sp}\,[\rho A] && \text{da } \mathrm{Sp}\,[A] = \sum_i \langle i | A | i \rangle \qquad (3)
\end{aligned}$$

Das Ergebnis dieser Betrachtung ist also, dass die Beschreibung abgeschlossener Quantensysteme in reinen Zuständen sowohl über den Zustandsvektor, als auch über den Dichteoperator gleichwertig ist. Wir können also behaupten, dass sich ein System im Zustand ρ befindet. Diese Beschreibung lässt sich dann im Folgenden auch auf allgemeine Quantenzustände übertragen.

2 Statistische Gemische

2.1 Präparationsverfahren



Wir betrachten nun folgende experimentelle Situation: Wir haben n verschiedene Präparationsapparate, die jeweils in die reinen Zustände $|\psi_i\rangle$ überführen, der in dem Einzelzustand dann auch tatsächlich vorliegt. Diese Zustände müssen dabei nicht zwangsläufig orthogonal oder linear unabhängig sein. Wir stellen uns nun ein übergeordnetes Präparationsverfahren vor, das einen, der eben genannten Apparate, mit einer gewissen klassischen Wahrscheinlichkeit zufällig anschaltet. Man spricht dann bei diesem Apparat davon, dass er die Zustände „mischt“. Durch dieses Mischen der reinen Zustände wird das Ensemble $\{|\psi_i\rangle, p_i\}$ realisiert. Wichtig hierbei ist, dass es sich um echtes Mischen handelt und nicht um eine Superposition der Einzelzustände, es wird somit durch eine klassische Wahrscheinlichkeit ein neuer Quantenzustand konstruiert. Das so beschriebene Präparationsverfahren definiert den Quantenzustand des *statistischen Gemisches* auch Gemenge genannt. Dieser Zustand beinhalten im Übrigen den reinen Zustand als Spezialfall.

2.2 Wo treten statistische Gemische auf?

Da das eben genannte Präparationsverfahren ein wenig künstlich klingt soll uns nun die Frage beschäftigen, wo solche statistischen Gemische in der Realität auftreten und ob sie eine physikalische Relevanz haben. Dies soll am Beispiel des Doppelspaltversuches verdeutlicht werden.
Wir haben in dem Fall also eine Blende mit zwei Öffnungen vor einem Schirm und beschießen diese Blende zum einen mit klassischen, harten Kugeln und zum anderen mit quantenmechanischen Teilchen, wie Atomen oder Molekülen. Hinterher betrachten wir auf dem Schirm das Ergebnis, welche Teile wo eingeschlagen sind. Dabei hängt die Häufigkeitsverteilung unter anderem von dem Messverfahren ab, mit dem wir den Versuch auswerten.
selektive Messung:
Bei der selektiven Messung werden die Einschlagspunkte selektiv markiert, also wird zum Beispiel nur

geschaut, welche Teilchen durch den ersten Spalt gegangen sind. Nach einigen Messungen mit anschließender Selektion betrachtet man nun das Ergebnis und stellt fest, dass nicht entartete gemischte Zustände entmischt werden. Reine Zustände werden wieder in reine Zustände überführt, die im Allgemeinen jedoch nicht die gleichen sind. Beim Doppelspaltversuch bedeutet dies, dass man beispielsweise den Spalt 1 schließt und nur nachschaut, was durch den Spalt 2 auf dem Schirm ankommt.
nicht-selektive Messung:
Bei dieser Messmethode wird keine Selektion vorgenommen und die Einschlagspunkte werden ohne Auswahl markiert. Dadurch entsteht ein zusammenfassendes Bild in dem sowohl gemischte, als auch reine Zustände in Gemische überführt werden. Allerdings gilt auch hier für die Gemische, dass sie im Allgemeinen in andere Gemische überführt werden. In dem Doppelspaltversuch bedeutet dies, dass nicht geschaut wird welche Teilchen durch welchen Spalt gegangen sind, sondern ist wird nur die Verteilung hinterher betrachtet.
Dies soll also veranschaulichen, dass es durchaus sinnvoll ist, ein statistisches Gemisch durch ein solches Präparationsverfahren zu definieren. Auch die physikalische Relevanz wird hierbei klar.

2.3 Dichteoperator statistischer Gemische

Wir wollen nun die Definition des eben eingeführten Dichteoperators von den reinen Zuständen auch auf die Gemische aufweiten. Dabei steht die Behauptung im Raum, dass sich die physikalischen Aussagen reiner Zustände auf die Gemische übertragen lassen. Dabei ist der Dichteoperator eines statistischen Gemisches wie folgt definiert:

$$\rho := \sum_{i=1}^{n} p_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right| = \sum_{i=1}^{n} p_i \rho_i \qquad \text{mit } \rho_i := \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right|$$

Für den Beweis dieser Behauptung führen wir die Aussagen über das Gemisch auf Aussagen über die jeweiligen Ensemblezustände ρ_i zurück. So folgt der Ausdruck für die Messwahrscheinlichkeit:

$$p(a_n) = \sum_i p(a_n|i) p_i \tag{4}$$

Dabei ist $p(a_n|i)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass der Messwert a_n gemessen wird, wenn der Zustand ρ_i vorliegt. Damit wird die Wahrscheinlichkeit unter der Voraussetzung. dass der klassische Präparator i gewählt hat, im quantenmechanischen Zustand den Wert a_n zu messen beschrieben. Mit 1 folgt dann

$$p(a_n|i) = \mathrm{Sp}\left[P_n \rho_i\right]$$

mit $\rho = \sum_i p_i \rho_i$ und den Rechenregeln der Spurbildung folgt dann:

$$p(a_n) = \mathrm{Sp}\left[P_n \rho\right]$$

Damit ist die Definition der Messwahrscheinlichkeit auf die Gemische übertragbar. Für den Erwartungswert greift das Argument, dass die Erwartungswerte der einzelnen Zustände mit p_i zum Gesamterwartungswert beitragen. Daher überträgt sich 3 direkt:

$$\langle A \rangle = \sum_i p_i \mathrm{Sp}\left[A \rho_i\right] = \mathrm{Sp}\left[A \rho\right]$$

Für die selektive Messung ergibt sich mit 2 und $\rho_i \to \tilde{\rho}'_{i,n} = P_n \rho_i P_n$ für den unnormierten Fall folgendes:

$$\rho \to \tilde{\rho}'_n = \sum_i p_i \tilde{\rho}'_{i,n} = P_n \rho P_n$$

Dabei wird die Entartung der Messwerte ausdrücklich zugelassen. Mit 4 folgt dann der normierte Fall:

$$\rho \to \rho'_n = \frac{1}{p(a_n)} P_n \rho P_n$$

Dieser Zusammenhang wird auch für den Fall der nicht-selektiven Messung ausgenutzt, sodass hier das Gemisch entsteht, dass sich additiv aus ρ'_n zusammensetzt:

$$\rho \to \rho' = \sum_n p(a_n) \frac{P_n \rho P_n}{\mathrm{Sp}\left[\rho P_n\right]} = \sum_n P_n \rho P_n$$

Damit haben wir gesehen, dass sich die physikalischen Aussagen des reinen Zustandes mit der Beschreibung über den Dichteoperator auf die Gemische übertragen lassen. Nun sollen neben diesen physikalischen Aussagen auch noch die Eigenschaften des Dichteoperators eines Gemisches gezeigt werden. Auch hier soll wieder die Frage gestellt werden, ob sich die Eigenschaften des Dichteoperators für reine Zustände auf den Dichteoperator des Gemisches übertragen lassen. Die erste Eigenschaft lautet:

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = 1 \quad \Rightarrow \quad \rho \text{ ist positiv}$$

Dies ergibt sich, da es sich hier um die klassische Wahrscheinlichkeit handelt. Die Aussage der Gleichung ist, dass in jedem Fall einer der auszuwählenden Zustände kommen wird. In der Anschauung ist dies klar verständlich, da bei einer zufälligen Auswahl (z.B. durch eine Münze) immer eines der möglichen Ergebnisse eintreten wird. Die zweite Eigenschaft lautet:

$$\rho = \sum_{i=1}^{N} p_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right| \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Sp}\left[\rho\right] = 1$$

Auch dies überträgt sich leicht, da die klassische Wahrscheinlichkeit immer positiv ist. Um die dritte Eigenschaft zeigen zu können betrachtet man die Spektralzerlegung des Dichteoperators:

$$\rho = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j \left|j\right\rangle \left\langle j\right|$$

Dabei ist λ_j eine positive reelle Zahl, da ρ positiv ist. Mit $\sum_j \lambda_j = 1$ folgt:

$$0 \leq \lambda_j \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Sp}\left[\rho^2\right] \leq 1$$

Dabei gilt „=“ eineindeutig für reinen Zustand und „≠“ für echte Gemische.

3 Der allgemeine Dichteoperator

3.1 allgemeiner Dichteoperator

Wir lösen uns nun auch von dem Dichteoperator des statistischen Gemisches und definieren den allgemeinen Dichteoperator:
Man nennt allgemein einen Operator dann einen *Dichteoperator*, wenn er folgende Bedingungen erfüllt:
(i) ρ ist positiv und damit hermitesch ($\rho^\dagger = \rho$)
(ii) $\mathrm{Sp}\left[\rho\right] = 1$

3.2 Gemischtheitsgrad

Wir wollen hier eine weitere Definition bringen, die eine Größe darstellt, die ein Maß für die klassische Durchmischtheit des Zustandes ist.
Aus der Spektralzerlegung von ρ ergibt sich, dass $\lambda_j = \frac{1}{d}$ der kleinste Wert für $\mathrm{Sp}\left[\rho^2\right]$ ist, der angenommen werden kann, wobei d die Dimension des Hilbert-Raumes ist. Dabei wäre dann $\rho = \frac{1}{d}\mathbb{I}$ der maximal gemischte Dichteoperator.
Man definiert den *Gemischtheitsgrad* durch

$$\Xi := 1 - \mathrm{Sp}\left[\rho^2\right]$$

für den gilt:

$$\underset{\textit{reiner Zustand}}{0} \quad \leq \quad \Xi \quad \leq \quad \underset{\textit{max. Mischung}}{1 - \frac{1}{d}}$$

Bei einem Gemischt nähert sich Ξ der 1 an, wenn die Dimension des Hilbert-Raumes zunimmt.

3.3 Konvexkombination

wir wollen nun eine Summe von Dichteoperatoren einführen, was zu konvexen Summe führt:

$$\rho = \sum_{l=1}^{k} r_l \rho_l$$

mit $\{\rho_l, l = 1, \ldots, k\}$ Dichteoperatoren und r_l positive Zahlen mit $\sum_l r_l = 1$. Das Ergebnis dieser konvexen Summe ist wieder ein Dichteoperator. Anhand dieser Summe kann man nun noch eine weitere Besonderheit des Dichteoperators des reinen Zustandes zeigen. Anders als andere Dichteoperatoren kann der Dichteoperator eines reinen Zustandes nicht in eine konvexe Summe zerlegt werden.
Zum Beweis dieser Aussage starten wir mit einem Zerlegungsversuch von $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$:

$$\rho = \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2, \qquad 0 < \lambda < 1$$

Für zu $|\psi\rangle$ orthogonalen Vektor $|\chi\rangle$ folgt:

$$\begin{aligned} \langle\chi|\rho|\chi\rangle = 0 &= \lambda\langle\chi|\rho_1|\chi\rangle + (1-\lambda)\langle\chi|\rho_2|\chi\rangle \\ \Rightarrow \qquad 0 &= \langle\chi|\rho_1|\chi\rangle = \langle\chi|\rho_2|\chi\rangle \end{aligned}$$

Die letzte Implikation folgt daraus, dass λ und $(\lambda - 1)$ positive Zahlen sind und auch ρ_1 und ρ_2 positiv sind. Unter Ausnutzung von $\mathrm{Sp}[\rho_1] = \mathrm{Sp}[\rho_2] = 1$ sind die einzigen nicht verschwindenden Matrixelemente von ρ_1 und ρ_2 in der ONB von $|\psi\rangle$:

$$\langle\psi|\rho_1|\psi\rangle = \langle\psi|\rho_2|\psi\rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad \rho = \rho_1 = \rho_2$$

Der Zerlegungsversuch ist damit also gescheitert. Durch Mischen reiner Zustände (oder Gemische) kann also nicht wieder ein reiner Zustand entstehen!

4 Verallgemeinerung des 2. Postulats

Kommen wir nun zum allgemeinen Quantenzustand und damit zur Verallgemeinerung des Postulates für reine Zustände in abgeschlossenen Quantensystemen. Allgemein ist der Zustand ein mathematisches Objekt, an dem man eine Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses einer Messung am System berechnen kann. Gerade (allgemeine) Dichteoperatoren sind solche Objekte, wenn man zwei Bedingungen fordert:

- Die *Wahrscheinlichkeiten* sind gegeben durch:

$$p(a_n) = \mathrm{Sp}[P_n\rho] \qquad \text{mit } a_n: \text{ Messwert und } P_n: \text{ Projektionsoperator}$$

- Der *Messprozess* überführt Zustände wie folgt:

$$\begin{aligned} \rho \to \rho_n' &= \frac{1}{p(a_n)} P_n\rho P_n \\ \rho \to \rho' &= \sum_n P_n\rho P_n \end{aligned}$$

Damit haben wir eine Verallgemeinerung des 2. Postulats, also der Projektionsmessung (von-Neumann-Messung) geschaffen.. Das Theorem von Gleason besagt außerdem, dass es keine anderen mathematischen Objekte gibt, die diese Bedingungen erfüllen. Auch hier kann man wieder sehen, dass sich die Beschreibung eines Zustandes durch den Dichteoperator ausgezahlt hat, da auch hier wieder eine weitere Verallgemeinerung möglich geworden ist

5 Ensemblezerlegung eines Dichteoperators

5.1 Uneindeutigkeit des Ensembles

Um näher auf die Ensemblezerlegung eingehen zu können betrachten wir zunächst zwei experimentelle Situationen: Im ersten Versuch sollen durch einen Apparat horizontal und vertikal polarisierte Photonen erzeugt werden. Wie genau das passiert soll hier nicht weiter von Interesse sein Beide sollen dabei mit

der gleichen Häufigkeit auftreten. Das dazugehörige Ensemble ergibt sich zu $\{|H\rangle, |V\rangle, p_H = p_V = \frac{1}{2}\}$
In einem zweiten Versuch sollen nun rechtszirkular und linkszirkular polarisierte Photonen erzeugt werden. Dieser Apparat kann völlig unabhängig vom ersten sein und sich anderer Methoden bedienen. Auch hier entstehen die verschiedenen Photonen mit jeweils gleicher Häufigkeit. Das dazugehörige Ensemble ist dann: $\{|R\rangle, |L\rangle, p_R = p_L = \frac{1}{2}\}$
Für beide Dichteoperatoren folgt dann:

$$\Rightarrow \quad \rho = \frac{1}{2}\mathbb{I}$$

Die Photonen befinden sich also im selben Zustand. Es folgt, dass die Kenntnis des Dichteoperators ρ keinen eindeutigen Rückschluss auf das Ensemble zulässt.

5.2 Ensemblezerlegung

Der Ursache dieser Uneindeutigkeit kann man mit einer Ensemblezerlegung auf den Grund gehen. Dabei gehen wir davon aus, dass es folgende Zerlegungen gibt:

$$\rho = \sum_a p_a |\psi_a\rangle \langle\psi_a| \qquad \rho = \sum_i |\tilde{\varphi}_i\rangle \langle\tilde{\varphi}_i| \qquad \rho = \sum_{n=1}^{d} \lambda_n |n\rangle \langle n|$$

Man kann nun zeigen, dass sich bei Ensemblezerlegungen Vektoren der Zerlegung als Linearkombination der Vektoren der anderen Zerlegung schreiben lassen und es damit beliebig viele Ensemblezerlegungen eines Dichteoperators gibt. Die Ursache dafür ist, dass sich ein Zustandsvektor als unendlich viele Linearkombinationen anderer Zustandsvektoren schreiben lässt. Die verschiedenen Zerlegungen sind mathematisch äquivalent. Nur wenn der Präparationsapparat bekannt ist, lässt sich die Ignoranzinterpretation anwenden.

5.3 Ignoranzinterpretation

Man sieht also, dass wir den Dichteoperator mathematisch verschieden zerlegen können. Doch was bedeutet das für den Versuch, also was liegt physikalisch tatsächlich vor? Dabei kann man bei der Interpretation über das Minimalprinzip hinausgehen, das besagt, dass die Abbildung bei einer Messung nur in der klassisch beschreibbaren Realität (also z.B. Messanzeigen etc.) erfolgt. Diese Interpretation vermeidet einige Paradoxien in der Quantenmechanik.
Wenn man nun ein Gemisch so präpariert wie in Kapitel 2.1, dann kann man die Ignoranzinterpretation anwenden. Der Quantenzustand befindet sich dann auch real und objektiv in einem der Zustände $|\psi_i\rangle$. Allerdings herrscht subjektiv Unkenntnis in welchen Zustand genau es sich befindet. Prinzipiell könnte aber jemand, der genau weiß, wie das Präparationsverfahren funktioniert, also genau weiß, welcher der Präparationsapparate eingeschaltet wurde, wissen welcher Zustand vorliegt. Daher spricht man davon, dass der Zustand ρ die Ignoranzinterpretation zulässt.

6 Dichteoperator von Qubits

Im Anschluss soll es nun nach dem allgemeinen Dichteoperator ein konkreteres Beispiel geben, der Dichteoperator von Qubits. Da der Dichteoperator ρ ein hermitescher Operator in $\mathcal{H}_2$ ist, lässt er sich nach der PAULI-Operatorbasis zerlegen:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \mathbf{r}\sigma) \\ \mathbf{r} &= \mathrm{Sp}\left[\rho\sigma\right] = \langle\sigma\rangle, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R} \qquad \text{BLOCH-Vektor} \\ \text{mit} \quad \mathrm{Sp}\left[\rho^2\right] &= \frac{1}{2}(1 + |\mathbf{r}|^2) \end{aligned}$$

Dabei sind σ die PAULI-Matrizen. Aus $\frac{1}{2} \leq \mathrm{Sp}\left[\rho^2\right] \leq 1$ folgt für den BLOCH-Vektor:

$$|\mathbf{r}|^2 \leq 1$$

Für den Gemischtheitsgrad ergibt sich damit:

$$\Xi = \frac{1}{2}(1 - |\mathbf{r}|^2)$$

Das lässt sich wie folgt interpretieren: für ein echtes Gemisch folgt, dass der BLOCH-Vektor $\mathbf{r}$ im Inneren der BLOCH-Kugel liegt. Für den Spezialfall eines vollständig gemischten Zustandes wird er durch den Kugelmittelpunkt ($\mathbf{r} = 0$) repräsentiert. Der Zusammenhang $\rho \leftrightarrow \mathbf{r}$ ist damit also eindeutig (Phasenfaktoren durch ρ nicht wiedergegeben, somit lässt sich der Zustand ρ durch Messung der Erwartungswerte $\langle\sigma\rangle$ bestimmen, im Gegensatz zum Zusammenhang $|\psi\rangle \leftrightarrow \mathbf{r}$.

7 Zusammenfassung

Dichteoperatoren beschreiben den allgemeinen Quantenzustand und sind damit eine Verallgemeinerung zu den normierten Zustandsvektoren. Durch Mischen von Zuständen kann kein reiner Zustand entstehen, egal ob der Ausgangszustand ein reiner Zustand ist oder ebenfalls ein Gemisch. Dichteoperatoren (positiv, hermitesch, $\mathrm{Sp}\,[\rho] = 1$) erfüllen ein allgemeines 2. Postulat. Und aus dem Dichteoperator lässt sich nicht eindeutig auf das Präparationsverfahren schließen.