

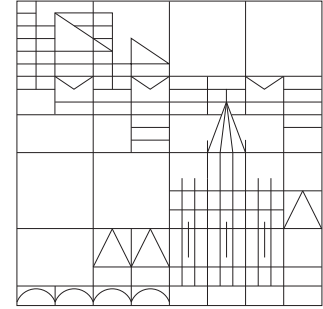
UNIVERSITÄT KONSTANZ

Fachbereich Physik

Prof. Dr. Guido Burkard

Dr. Mónica Benito

<https://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/19W-QI>



Quanteninformatiionstheorie

Wintersemester 2019/2020 - Übungsblatt 8

Ausgabe: 13.12.2019, Abgabe: 20.12.2020, Übungen: 13.1.2020

Aufgabe 29: Dekohärenz auf der Bloch-Kugel (6 Punkte)

Der Zustand eines Qubits kann immer auf der Bloch-Kugel durch den Bloch-Vektor $\mathbf{b}$ dargestellt werden,

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}),$$

wobei $\mathbf{b}$ ein dreidimensionaler reeller Vektor ist.

a) Nehmen wir an, das Qubit werde mit der Wahrscheinlichkeit $\tilde{p} = \frac{4}{3}p$ depolarisiert, d. h. durch einen komplett gemischten Zustand $\mathbb{1}/2$ ersetzt.

(i) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass der Dichte-Operator des Qubits sich durch diese Operation wie folgt verändert:

$$\rho \rightarrow \rho' = (1 - p)\rho + \frac{p}{3}(\sigma_1\rho\sigma_1 + \sigma_2\rho\sigma_2 + \sigma_3\rho\sigma_3).$$

(ii) (1 Punkt) Wie verändert sich dabei der Bloch-Vektor?

b) (2 Punkte) Eine Amplituden-Dämpfung kann man z. B. bei der spontanen Emission eines angeregten Atoms beobachten. Mit der Wahrscheinlichkeit p geht das Atom in den Grundzustand $|0\rangle_Q$ über und mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$ bleibt es im angeregten Zustand $|1\rangle_Q$. Die unitäre Transformation, die diesen Vorgang beschreibt, ist

$$\begin{aligned} |0\rangle_Q|0\rangle_E &\rightarrow |0\rangle_Q|0\rangle_E \\ |1\rangle_Q|0\rangle_E &\rightarrow \sqrt{1-p}|1\rangle_Q|0\rangle_E + \sqrt{p}|0\rangle_Q|1\rangle_E. \end{aligned}$$

$|0/1\rangle_E$ beschreibt den Zustand der Umgebung oder hier die Anzahl der ausgestrahlten Photonen. Finden Sie die Kraus-Operatoren, die den Dichte-Operator transformieren. Was passiert mit dem Bloch-Vektor nach der Amplituden-Dämpfung?

c) (2 Punkte) Die Dekohärenz der Phase eines Qubits kann man durch die folgende unitäre Operation beschreiben:

$$\begin{aligned} |0\rangle_Q|0\rangle_E &\rightarrow |0\rangle_Q|0\rangle_E \\ |1\rangle_Q|0\rangle_E &\rightarrow \sqrt{1-p}|1\rangle_Q|0\rangle_E + \sqrt{p}|1\rangle_Q|1\rangle_E. \end{aligned}$$

p gibt die Wahrscheinlichkeit an, ob das Qubit mit der Umgebung wechselwirkt. Finden Sie die entsprechenden Kraus-Operatoren und finden Sie heraus, wie sich dabei der Bloch-Vektor transformiert.

Aufgabe 30: Amplituden- und Phasendämpfung (4 Punkte)

a) (2 Punkte) Gegeben sei ein Amplitudendämpfungskanal. Die T_2 -Phasenkohärenzzeit ist definiert als die Inverse der exponentiellen Zerfallsrate Γ_2 der nicht-diagonalen Elemente der Qubit-Dichtematrix. Die T_1 -Relaxationszeit ist definiert als die Inverse der exponentiellen Zerfallsrate Γ_1 der diagonalen Elemente. Zeigen Sie, dass $T_2 = 2T_1$.

b) (2 Punkte) Nehmen Sie nun zusätzlich eine Phasendämpfung mit Zerfallsrate Γ_ϕ an und zeigen Sie, dass $T_2 < 2T_1$ und dass die Korringabeziehung

$$\frac{1}{T_2} = \frac{1}{2T_1} + \frac{1}{T_\phi}$$

erfüllt ist.