UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Mónica Benito
https://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/19W-QI

Quanteninformationstheorie
Wintersemester 2019/2020 - Übungsblatt 7
Ausgabe: 6.12.2019, Abgabe: 13.12.2019, Übungen: 16.12.2019

Aufgabe 26: Neumark-Theorem

Beweisen Sie das Neumark Theorem:

Theorem (Neumark)**.** *Jedes POVM* $\{F_a\}, a = 1, \ldots, n$ *auf* $\mathcal{H}_A$ *mit* $N = \dim \mathcal{H}_A \leq n$ *(wobei* $\operatorname{rang} F_a = 1$ *gelten soll; der Rang eines hermiteschen Operators ist gleich der Anzahl der nicht verschwindenden Eigenwerte) lässt sich als orthogonale Messung auf* $\mathcal{H}$ *mit* $\mathcal{H}_A \subseteq \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_A^\perp$ *realisieren, wobei* $\dim \mathcal{H} \geq n$.

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Jedes POVM-Element F_a kann durch einen nicht-normierten Vektor $\left|\tilde{\psi}_a\right\rangle$ dargestellt werden, $F_a = \left|\tilde{\psi}_a\right\rangle \left\langle\tilde{\psi}_a\right|$. Sei $\{|i\rangle\,,\ i = 1 \ldots N\}$ eine beliebige Orthonormalbasis in $\mathcal{H}_A$. Zeigen Sie zunächst, dass die n-dimensionalen Vektoren $\mathbf{V}^{(i)}$ mit Komponenten $v_a^{(i)} = \left\langle i \middle| \tilde{\psi}_a \right\rangle$ orthonormiert sind, d.h. $(\mathbf{V}^{(i)})^\dagger \mathbf{V}^{(j)} = \delta_{ij}$ $(i, j = 1 \ldots N)$.

b) Man kann diese Vektoren mit $n - N$ zustzlichen Vektoren vervollständigen, damit sie zusammen eine Orthonormalbasis eines erweiterten n-dimensionalen Raums bilden. Nehmen Sie an, dass die zusätzlichen Vektoren gefunden wurden (das ist immer möglich!), d.h. wir kennen $\mathbf{V}^{(i)}$ auch für $i = N+1 \ldots n$. Sei dann $\{|i\rangle\,,\ i = N+1 \ldots n\}$ eine beliebige Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_A^\perp$ und $\left|\tilde{\psi}_a^\perp\right\rangle = \sum_{i=N+1,n} v_a^{(i)} |i\rangle \in \mathcal{H}_A^\perp$. Damit kann eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ als $|u_a\rangle = \left|\tilde{\psi}_a\right\rangle + \left|\tilde{\psi}_a^\perp\right\rangle$ $(a = 1 \ldots n)$ gewählt werden. Zeigen Sie schließlich, dass die orthogonale Messung $P_a = |u_a\rangle \langle u_a|$ auf $\mathcal{H}$ dem POVM-Element F_a mit zugehörigem Messoperator $M_a = \sqrt{F_a}$ auf $\mathcal{H}_A$ entspricht.

c) Gegeben sind die drei POVM Elemente F_a für einzelne Qubit-Systeme
$F_a = \frac{2}{3}|\uparrow_{\mathbf{n}_a}\rangle\langle\uparrow_{\mathbf{n}_a}|$, mit

$$\mathbf{n}_1 = (0,0,1)\,; \quad \mathbf{n}_2 = \left(\sqrt{3}/2, 0, -1/2\right); \quad \mathbf{n}_3 = \left(-\sqrt{3}/2, 0, -1/2\right).$$

Finden Sie $|\tilde{\psi}_a\rangle$ in der Basis $\{|\uparrow_z\rangle, |\downarrow_z\rangle\}$.

d) Zufolge des Neumark-Theorems kann die POVM in (b) als eine orthogonale Messung eines Qutrits, ein Quantensystem in einem 3D-Hilbertraum, realisiert werden. Finden Sie die dazugehörigen Zustände $|u_a\rangle$ (a=1,2,3).

Aufgabe 27: Optimale Messungen (5 Punkte)

Alice kann an Bob folgende Zustände schicken: $|\psi_1\rangle = |0\rangle$, $|\psi_2\rangle = -\sin\theta\,|0\rangle + \cos\theta\,|1\rangle$, und $|\psi_3\rangle = -\sin\theta\,|0\rangle - \cos\theta\,|1\rangle$, wobei $\theta = \pi/6$. Nun schickt sie diese Zustände mit Wahrscheinlichkeit jeweils 1/3. Bob misst die empfangenen Zustände und muss sich bei jeder Messung für eine der drei Zustände von Alice entscheiden. Dabei macht er in diesem Fall unausweichlich Fehler. Als Fehler bezeichnen wir ein Ereignis, bei welchem Alice einen Zustand schickt und die Messung, die Bob durchführt, zu einer Wahl führt, die mit dem Zustand von Alice nicht übereinstimmt.

a) (2.5 Punkte) Welche orthogonale Messung minimiert die Fehlerwahrscheinlichkeit?

b) (2.5 Punkte) Können Sie eine POVM mit drei Elementen konstruieren, bei der diese Wahrscheinlichkeit kleiner ist?

Aufgabe 28: Verschränkungs-Destillation (5 Punkte)

Der reine Zwei-Qubit Zustand

$$|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$$

kann durch lokale Operationen zu dem Bell-Zustand

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

destilliert werden.

a) (2.5 Punkte) Sei M_0 ein Mess-Operator einer generalisierten Messung für das erste Qubit,

$$M_0 = \frac{k}{\alpha}|0\rangle\langle 0| + \frac{k}{\beta}|1\rangle\langle 1| \ .$$

Finden Sie den zweiten Mess-Operator M_1, sowie die entsprechenden POVM-Elemente. Für welche Werte von k ist diese Messung mit 2 POVM-Elemente möglich?

b) (2.5 Punkte) Zeigen Sie, dass M_0 den Zustand $|\psi\rangle$ in den Bell-Zustand $|\Phi^+\rangle$ verwandelt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p_0 dieses Prozesses.