UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Mónica Benito
https://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/19W-QI

**Quanteninformationstheorie**
**Wintersemester 2019/2020 - Übungsblatt 6**
Ausgabe: 29.11.2019, Abgabe: 6.12.2019, Übungen: 9.12.2019

## Aufgabe 22: Bures-Abstand (4 Punkte)

Der *Bures-Abstand* zwischen zwei Zustände, die durch Dichteoperatoren $\rho_1$ und $\rho_2$ in einem Hilbert-Raum gegeben sind, wird wie folgt definiert:

$$D_{\mathrm{B}}(\rho_1, \rho_2) = \sqrt{2}\sqrt{1 - \mathrm{Tr}\left[\left(\rho_1^{1/2}\rho_2\rho_1^{1/2}\right)^{1/2}\right]}.$$

Beachten Sie, dass es bei einem positiv semidefiniten Operator immer genau eine Wurzel gibt, die auch positiv semidefinit ist. Genau diese Wurzel ist in der obigen Definition gemeint.

a) (2 Punkt) Berechnen Sie $D_{\mathrm{B}}(\rho_1, \rho_2)$ für

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad \rho_2 = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

b) (1 Punkt) Wie sieht der Bures-Abstand für zwei reine Zustände mit den Wellenfunktionen $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ aus?

c) (1 Punkt) Warum wäre die einfachere Variante

$$D(\rho_1, \rho_2) = \sqrt{2}\sqrt{1 - \sqrt{\mathrm{Tr}\left[\rho_1\rho_2\right]}}$$

für die Definition des Abstandes ungeeignet?

## Aufgabe 23: Projektive Messung (2 Punkte)

Gegeben sei die Observable

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ,$$

a) (1 Punkt) Finden Sie die spektrale Zerlegungen, das heißt $\lambda_j$ und $\hat{P}_j$ (j=1,2), damit $A = \sum_{j=1}^{2} \lambda_j \hat{P}_j$.
b) (1 Punkt) Gegeben ist der Zustand $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Ergebnisse.

**Aufgabe 24: Gisin-Hughston-Josza-Wootters (GHJW) Theorem (4 Punkte)**

Die Ensemble-Interpretation der Dichtematrix $\rho_A$ ist nicht eindeutig, d.h. ein und dieselbe Dichtematrix $\rho_A$ kann durch zwei verschiedene Ensemble-Präparationen realisiert werden,

$$\rho_A = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \sum_i p'_i |\psi'_i\rangle\langle\psi'_i| \ .$$

Das GHJW Theorem besagt, dass zu jedem solchen Ensemble eine Reinigung von $\rho_A$ auf einem erweiterten Hilbertraum $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ und eine Messung $B$ existiert, welche dieses Ensemble realisiert. So wird durch die Messung der Observable $B = \sum_i \lambda_i |\chi_i\rangle\langle\chi_i|$, wobei $\{\lambda_i\}$ die Eigenwerte von $\rho_A$ sind, auf dem Zustand

$$|\Phi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i}|\psi_i\rangle \otimes |\chi_i\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

das Ensemble $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ realisiert. Hier ist $\{|\chi_i\rangle\}$ eine Orthonormalbasis in $\mathcal{H}_B$.
(a) (2 Punkte) Welche Observable $B'$ muss man im Zustand

$$|\Phi'\rangle = \sum_i \sqrt{p'_i}|\psi'_i\rangle \otimes |\chi'_i\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

messen, um das Ensemble $\{p'_i, |\psi'_i\rangle\}$ zu realisieren?
(b) (2 Punkte) Gegeben seien die Schmidt-Zerlegungen von $|\Phi\rangle$ und $|\Phi'\rangle$

$$|\Phi\rangle = \sum_k \sqrt{\lambda_k}|k_A\rangle \otimes |k_B\rangle; \quad |\Phi'\rangle = \sum_k \sqrt{\lambda_k}|k_A\rangle \otimes |k'_B\rangle;$$

wobei $\{|k_B\rangle\}$ und $\{|k'_B\rangle\}$ Orthonormalbasen auf $\mathcal{H}_B$ sind, die über die Basiswechselmatrix $U_B$ zusammenhängen, $|k_B\rangle = U_B|k'_B\rangle$. Welche Observable $B''$ muss man im Zustand $|\Phi\rangle$ messen, um das Ensemble $\{p'_i, |\psi'_i\rangle\}$ zu realisieren?

**Aufgabe 25 : POVM**

Gegeben sind vier Operatoren:

$$F_1 = \frac{1}{2}\left|\uparrow_z\right\rangle\left\langle\uparrow_z\right|; \quad F_2 = \frac{1}{2}\left|\downarrow_z\right\rangle\left\langle\downarrow_z\right|; \quad F_3 = \frac{1}{2}\left|\uparrow_x\right\rangle\left\langle\uparrow_x\right|; \quad F_4 = \frac{1}{2}\left|\downarrow_x\right\rangle\left\langle\downarrow_x\right|.$$

Die Zustande $|\uparrow_\alpha\rangle$ und $|\downarrow_\alpha\rangle$ sind Eigenzustände der Spin-1/2 Operatoren entlang der Achse $\alpha$, $S_\alpha\left|\uparrow(\downarrow)_\alpha\right\rangle = \pm\frac{1}{2}\left|\uparrow(\downarrow)_\alpha\right\rangle$. The states $|\uparrow_\alpha\rangle$ and $|\downarrow_\alpha\rangle$ are the eigenstates of the 1/2-spin operators in direction $\alpha$, $S_\alpha\left|\uparrow(\downarrow)_\alpha\right\rangle = \pm\frac{1}{2}\left|\uparrow(\downarrow)_\alpha\right\rangle$. Zeigen Sie, dass diese POVM als eine orthogonale Messung in einem Zweiqubitsystem unter der Einführung eines weiteren Spins (Hilfs- oder Ancilla-Spin genannt) realisiert werden kann.