UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Mónica Benito
https://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/19W-QI

Quanteninformationstheorie
Wintersemester 2019/2020 - Übungsblatt 5
Ausgabe: 22.11.2019, Abgabe: 29.11.2019, Übungen: 2.12.2019

Aufgabe 18: Dichtematrix und Quanteninformation

a) Geben Sie die Dichtematrix ρ für den Zustand $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B)$ an.

b) Finden Sie die Dichtematrizen der Systeme A und B aus den partiellen Spuren $\rho_A = \mathrm{Tr}_B \rho$ und $\rho_B = \mathrm{Tr}_A \rho$.

Hinweis: Die partielle Spur der Dichtematrix des zusammengesetzten Systems $\rho \equiv \rho_{AB}$ bezüglich des Teilsystems B ist durch die reduzierte Dichtematrix ρ_A gegeben, mit den Komponenten $(\rho_A)_{i,j} = \sum_k \rho_{ik,jk}$. Die Summe läuft über die zum Teilsystem B gehörenden Indizes.

c) Berechnen Sie die von Von-Neumann-Entropien $S(\rho_A)$, $S(\rho_B)$ und $S(\rho)$. Vergleichen Sie $S(\rho)$ mit $S(\rho_A)$ bzw. $S(\rho_B)$. Stellen Sie Ihr Ergebnis der allgemeinen Regel für die (klassische) Shannon-Entropie gegenüber.

d) Führen Sie die Schritte a)-c) für einen Zustand der Form $|\psi'\rangle = |\phi\rangle_A |\chi\rangle_B$ durch. Wo gibt es Unterschiede und woran liegen diese?

e) Eine Dichtematrix beschreibe den Zustand von 2 Qubits. Die partiell transponierte Dichtematrix bekommt man, wenn man die Dichtematrix nur bezüglich eines Teilsystems transponiert. Wenn wir das zweite Teilsystem zum Transponieren auswählen, bedeutet dies die folgende Transformation für die Dichtematrix ρ in der Basis $\{|0\rangle_A |0\rangle_B, |0\rangle_A |1\rangle_B, |1\rangle_A |0\rangle_B, |1\rangle_A |1\rangle_B\}$: $\rho_{12} \leftrightarrows \rho_{21}$, $\rho_{14} \leftrightarrows \rho_{23}$, $\rho_{32} \leftrightarrows \rho_{41}$ und $\rho_{34} \leftrightarrows \rho_{43}$. Finden Sie die partiell transponierten Dichtematrizen für die Zustände $|\psi\rangle$ und $|\psi'\rangle$. Was ist der wichtige Unterschied zwischen diesen beiden Operatoren?

Hinweis: Stellen Sie fest, ob die partiell transponierten Dichtematrizen positiv semidefinit sind, z. B. indem Sie überprüfen, ob diese Operatoren nur Eigenwerte ≥ 0 haben.

Aufgabe 19 : Die Blochkugel (3 Punkte) Die Dichtematrix eines Zweizustandsystems kann wie bekannt immer als $\boldsymbol{\rho} = (\mathbb{1} + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})/2$ geschrieben werden.

a) (1 Punkt) Berechnen Sie für einen beliebigen Vektor $\mathbf{n}$ den Erwartungswert $\langle \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \rangle$.

b) (1 Punkt) Berechnen Sie die Eigenwerte von $\boldsymbol{\rho}$ und die dazugehörenden Eigenvektoren.

c) (1 Punkt) Ein reiner Zustand sei durch

$$|\theta, \varphi\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos\theta/2 \\ e^{i\varphi/2} \sin\theta/2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

gegeben. Berechnen Sie auch hier die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\boldsymbol{\rho} = |\theta, \varphi\rangle \langle \theta, \varphi|$. Was ist $\mathbf{p}$ für diesen Zustand?

Aufgabe 20 : Die reduzierte Dichtematrix (3 Punkte)

Gegeben ist ein aus zwei Teilen bestehender (bipartiter) Hilbertraum, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ und ein Zustand $\boldsymbol{\rho}$.

a) (1 Punkt) Zeigen Sie explizit, dass die reduzierte Dichtematrix, $\boldsymbol{\rho}_A = \mathrm{Tr}_B\, \boldsymbol{\rho}$, die folgenden Eigenschaften hat:
i) $\boldsymbol{\rho}_A$ ist positiv semidefinit.
ii) $\mathrm{Tr}\, \boldsymbol{\rho}_A = 1$.
iii) $\boldsymbol{\rho}_A^\dagger = \boldsymbol{\rho}_A$.

b) (1 Punkt) Betrachten Sie jetzt ein Zweiqubitsystem mit $|ab\rangle = |a\rangle_A \otimes |b\rangle_B$. Gegeben sei der Zustand

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|00\rangle + \sin\varphi\, |10\rangle + \cos\varphi\, |11\rangle\right).$$

Betrachten Sie die Dichtematrix $\boldsymbol{\rho} = |\varphi\rangle \langle\varphi|$ und berechnen Sie $\boldsymbol{\rho}_A$ und $\boldsymbol{\rho}_B$.

c) (1 Punkt) Verwenden Sie das Ergebnis aus b) und finden Sie die Schmidt-Zerlegung des Zustands $|\varphi\rangle$. Überprüfen Sie das Ergebnis!

Aufgabe 21: 2-Qubit Separabilität (4 Punkte)

a) (2 Punkte) Gegeben ist der 2-Qubit Zustand

$$|\Psi\rangle = \sin\frac{\tau-\phi}{2} \sin\frac{\theta}{2}|0\rangle\otimes|0\rangle + \sin\frac{\tau+\phi}{2} \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle\otimes|1\rangle + \cos\frac{\tau-\phi}{2} \sin\frac{\theta}{2}|1\rangle\otimes|0\rangle + \cos\frac{\tau+\phi}{2} \cos\frac{\theta}{2}|1\rangle\otimes|1\rangle$$

Finden Sie die Bedingungen für ϕ, τ und θ, damit der Zustand separable ist. Schreiben Sie den dazugehörigen Zustand als Produkt-Zustand.
b) (2 Punkte) Kann der Bell-Zustand

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle)$$

als ein Produkt-Zustand dargestellt werden? Was ist die Schmidt-Zahl (oder der Schmidt-Rang) dieses Zustands?