

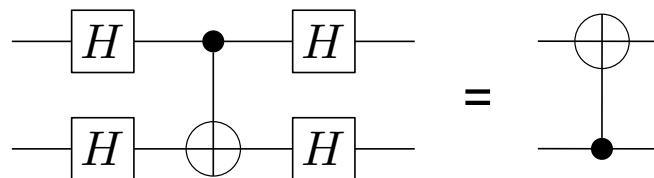
Quanteninformatiionstheorie

Wintersemester 2019/2020 - Übungsblatt 4

Ausgabe: 15.11.2019, Abgabe: 22.11.2019, Übungen: 25./28.11.2019

Aufgabe 14 : CNOT- und Hadamard-Gatter (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Rolle von *control*- und *target*-Qubit für das CNOT-Gatter durch den folgenden Quantenschaltkreis vertauscht werden kann:



H bezeichnet hierbei das *Hadamard*-Gatter.

Aufgabe 15 : CNOT, Hadamard und CPHASE-Gatter (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass ein CNOT-Gatter durch 2 Hadamard-Gatter und ein CPHASE-Gatter,

$$U_{\text{Cph}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (1)$$

mit $\phi = \pi$, ausgedrückt werden kann. Zeichnen Sie die Quantenschaltung.

Aufgabe 16 : Euler Winkel

Eine Ein-Qubit-Rotation $R_{\vec{n}}(\theta)$ mit Winkel θ um die Achse \vec{n} , kann durch

$$R_{\vec{n}}(\theta) = \exp(-i\theta \vec{n} \cdot \vec{\sigma}/2) \quad (2)$$

ausgedrückt werden.

a) Zeigen Sie, dass

$$R_{\vec{n}}(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} - i(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin \frac{\theta}{2} . \quad (3)$$

Benutzen Sie die Eigenschaften von den Pauli-Matrizen.

b) Zeigen Sie, dass eine beliebige unitäre Ein-Qubit-Operation durch

$$U = e^{i\alpha} R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta) . \quad (4)$$

implementiert werden kann.

Hint: Verwenden Sie, dass $U^\dagger U = 1$.

Aufgabe 17: Hamiltonoperator und Quantengatter (4 Punkte) Betrachten Sie den folgenden Hamiltonoperator für ein Qubit,

$$H = i\hbar\frac{\omega}{2}(|0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|), \quad (5)$$

der auf einem Hilbert-Raum von orthogonalen Zuständen $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ wirkt, wobei ω reell ist.

- a) Überprüfen Sie, ob H selbstadjungiert ist.
- b) Finden Sie die Eigenwerte und die entsprechenden normierten Eigenzustände von H .
- c) Finden Sie die unitäre Matrix

$$U(t) = \exp(-iHt/\hbar). \quad (6)$$

Zu welchen Zeiten t wirkt $U(t)$ wie ein NOT-Operator:

$$U(t)|0\rangle \rightarrow |1\rangle, \quad U(t)|1\rangle \rightarrow |0\rangle? \quad (7)$$

- d) Berechnen Sie $U(t = \pi/2\omega)$ und $(U(t = \pi/2\omega))^2$.