

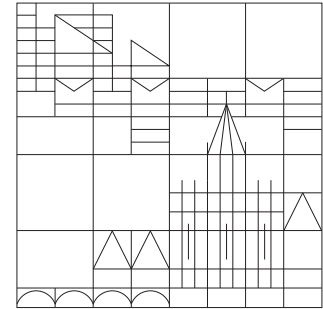
UNIVERSITÄT KONSTANZ

Fachbereich Physik

Prof. Dr. Guido Burkard

Dr. Mónica Benito

<https://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/19W-QI>



Quanteninformatiionstheorie

Wintersemester 2019/2020 - Übungsblatt 2

Ausgabe: 31.10.2019, Abgabe: 8.11.2019, Übungen: 11./15.11.2019

Aufgabe 6 : Kapazität (5 Punkte)

Berechnen Sie die Kapazität des symmetrischen binären Kanals, definiert durch $X = Y = \{0, 1\}$ und die bedingte Wahrscheinlichkeit $p(y|x)$ mit

$$p(0|0) = p(1|1) = 1 - \epsilon$$

und

$$p(0|1) = p(1|0) = \epsilon,$$

wobei für den Sender gilt:

$$p_x(0) = p; \quad p_x(1) = 1 - p.$$

Berechnen Sie dazu

- (1 Punkt) die Shannon-Entropie $H(X)$ des Senders,
- (1 Punkt) Wahrscheinlichkeitsverteilung $p_y(y)$ und Shannon-Entropie $H(Y)$ des Empfängers,
- (1 Punkt) Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(x, y)$ und gemeinsame Shannon-Entropie $H(X, Y)$,
- (1 Punkt) die gegenseitige Information $I(X; Y) = I(\epsilon, p)$ und daraus
- (1 Punkt) die Kapazität

$$C(\epsilon) = \max_p I(\epsilon, p).$$

Aufgabe 7 : Kanal mit Rauschen (3 Punkte)

Gegeben sei ein 4-symboliger Kanal mit Rauschen, so dass das Symbol entweder fehlerfrei übermittelt wird oder mit der gleichen Wahrscheinlichkeit zum darauffolgenden Symbol geändert wird,

$$\begin{pmatrix} p(0|0) & p(0|1) & p(0|2) & p(0|3) \\ p(1|0) & p(1|1) & p(1|2) & p(1|3) \\ p(2|0) & p(2|1) & p(2|2) & p(2|3) \\ p(3|0) & p(3|1) & p(3|2) & p(3|3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Berechnen Sie die Kapazität des Kanals und die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Symbole, die die gegenseitige Information maximiert.

Aufgabe 8 : Quantenkanal

Wieviel Information kann pro Benutzung eines Quantenkanals übertragen werden, wenn der Sender (mit gleicher Wahrscheinlichkeit) die beiden Symbole (reine Zustände)

$$|\varphi_1\rangle = |0\rangle$$

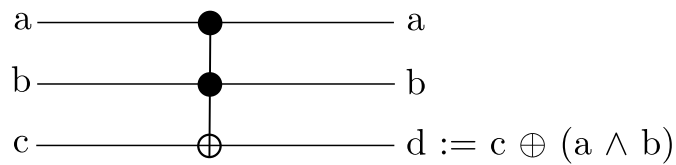
und

$$|\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$$

verwendet?

Aufgabe 9 : Toffoli-Gatter (2 Punkte)

a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass das klassische Toffoli-Gatter,



reversibel ist, d.h. drücken Sie c durch a , b und d aus, wobei $d = c \oplus (a \wedge b)$.

b) (1 Punkt) Drücken Sie ein reversibles AND-Gatter durch ein Toffoli-Gatter aus.