UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Mónica Benito
https://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/19W-QI

Quanteninformationstheorie
Wintersemester 2019/2020- Übungsblatt 12
Ausgabe: 24.1.2020, Abgabe: 31.1.2020, Übungen: 3.2.2020

Aufgabe 39 : Verschränkungsreinigung (5 Punkte)

a) (1 Punkt) Betrachten Sie den Dichteoperator für den Zustand,

$$\rho_W(r) = r\,|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+| + \frac{1-r}{4}\mathbb{1},$$

wobei $0 \leq r \leq 1$. Geben Sie die Matrixdarstellung von $\rho_W(r)$ in der Produktbasis $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ an und bestimmen Sie die Eigenwerte λ_i von $\rho_W(r)$ und berechnen Sie danach die *Concurrence*

$$C(\rho_W(r)) = \max\{\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4, 0\},$$

mit $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$, als Funktion von r.

b) (1 Punkt) Berechnen Sie die Güte (*fidelity*) $F(r) = \langle\Phi_+|\rho_W(r)|\Phi_+\rangle$ und zeigen Sie, dass

$$\rho_W(F) = F\,|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+| + \frac{1-F}{3}\left(|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+| + |\Psi_-\rangle\langle\Psi_-| + |\Phi_-\rangle\langle\Phi_-|\right).$$

c) (2 Punkte) Betrachten Sie die unitären Matrizen für das bilaterale XOR- (oder CNOT-) Gatter

$$U_{\text{BXOR1}} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_2 + \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \otimes \mathbb{1}_2,$$
$$U_{\text{BXOR2}} = \mathbb{1}_2 \otimes \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_2 \otimes \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

und $U_{\text{BXOR}} = U_{\text{BXOR1}} U_{\text{BXOR2}}$. Bilden Sie $\rho = U_{\text{BXOR}}\left(\rho_W(F) \otimes \rho_W(F)\right) U_{\text{BXOR}}^\dagger$ und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p_c, dass sich die zwei letzten Qubits, nach Messung in der Produktbasis, in einem der Zustände $|00\rangle$ oder $|11\rangle$ befinden.

d) (1 Punkt) Berechnen Sie die Güte des neuen Zustands,

$$F'(F) = \frac{\mathrm{Tr}\left\{\rho\left(|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+| \otimes \Pi\right)\right\}}{p_c}, \text{ mit } \Pi = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Wie hängt Π mit p_c zusammen? Was passiert mit $F'(F)$ für $1/2 < F < 1$?

Aufgabe 40 : Concurrence

Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden Definitionen der *Concurrence*, $C := \sqrt{2\,[1 - \mathrm{Tr}(\rho_A^2)]}$ und $C := |\, \langle\psi|\, \theta\, |\psi\rangle\, |$ für reine Zustände in einem bipartiten Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ mit $\dim(\mathcal{H}_A) = \dim(\mathcal{H}_B) = 2$. Dabei ist die Wirkung des Operators θ auf einen Zustand $|\psi\rangle = \alpha_{00}\,|00\rangle + \alpha_{01}\,|01\rangle + \alpha_{10}\,|10\rangle + \alpha_{11}\,|11\rangle$ gegeben durch $\theta\,|\psi\rangle = \sigma_y \otimes \sigma_y\,|\psi\rangle^* = -\alpha_{11}^*\,|00\rangle + \alpha_{10}^*\,|01\rangle + \alpha_{01}^*\,|10\rangle - \alpha_{00}^*\,|11\rangle$ und $\rho_A = \mathrm{Tr}_B\,|\psi\rangle\,\langle\psi|$ ist die Dichtematrix im Teilsystem A.

Aufgabe 41 : Eigenschaften der Von-Neumann-Entropie (5 Punkte)

Die relative Entropie zweier Dichtematrizen ρ und σ ist definiert als

$$S(\rho|\sigma) = \mathrm{Tr}[\rho(\log\rho - \log\sigma)].$$

a) (1 Punkt) Zeigen Sie $S(\rho|\sigma) \geq 0$.
Hinweis: Benutzen Sie, dass die Funktion $f(x) = -x\log x$ konkav ist, d.h. $f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) \geq \sum_i \lambda_i f(x_i)$ für $\lambda_i > 0$ mit $\sum_i \lambda_i = 1$ als auch $f(y) - f(x) \leq (y-x)f'(x)$, um zu zeigen, dass $\mathrm{Tr}\left[f(\hat{B}) - f(\hat{A})\right] \leq \mathrm{Tr}\left[(\hat{B} - \hat{A})f'(\hat{A})\right]$ für zwei hermitesche Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ gilt.

b) (1 Punkt) Zeigen Sie mit Hilfe von a), dass $S(\rho) \leq \log d$ gilt, wenn ρ eine $d \times d$-Matrix ist.

c) (1 Punkt) Nutzen Sie a) um die Subadditivität der Von-Neumann-Entropie zu zeigen,

$$S(\rho_{AB}) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B).$$

Hinweis: Betrachten Sie die relative Entropie der Dichtematrizen $\rho_A \otimes \rho_B$ und ρ_{AB}.

d) (1 Punkt) Zeigen Sie mit Hilfe von c) die Konkavität der Von-Neumann-Entropie, d.h.

$$S\left(\sum_i \lambda_i \rho_i\right) \geq \sum_i \lambda_i S(\rho_i)$$

für $\lambda_i > 0$ und $\sum_i \lambda_i = 1$.
Hinweis: Verwenden sie die Subadditivität bezüglich des Zustands $\rho_{AB} = \sum_i \lambda_i\,(\rho_i)_A \otimes (|\psi_i\rangle\,\langle\psi_i|)_B$, wobei $(\rho_i)_A \equiv \rho_i$ (nicht mit der Bezeichnung für die reduzierte Dichtematrix verwechseln!) und $\{|\psi_i\rangle_B\}$ eine beliebige orthonormierte Basis ist.

e) (1 Punkt) Zeigen Sie die Araki-Lieb-Ungleichung (Dreiecksungleichung),

$$S(\rho_{AB}) \geq |S(\rho_A) - S(\rho_B)|.$$

Hinweis: Erweitern Sie das System auf ABC mit einem reinen Zustand $|\psi\rangle$, sodass $\rho_{AB} = \mathrm{Tr}_C\,|\psi\rangle\,\langle\psi|$. Wenden Sie dann die Subadditivität auf ρ_{BC} und ρ_{AC} an.