UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Mónica Benito
https://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/19W-QI

Quanteninformationstheorie
Wintersemester 2019/2020- Übungsblatt 11
Ausgabe: 17.1.2020, Abgabe: 24.1.2020, Übungen: 27.1.2020

Aufgabe 36 : Nielsen-Theorem

Alice und Bob besitzen einen gemeinsamen Quantenzustand $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, den sie mittels lokaler Operationen und klassischer Kommunikation (LOCC) manipulieren dürfen. Die Von-Neumann-Entropie $S(\rho_A^\psi)$ mit $\rho_A^\psi = \mathrm{Tr}_B |\psi\rangle\langle\psi|$ ist ein Maß für die Verschränkung von $|\psi\rangle$.
Das Nielsen-Theorem [Nielsen, Phys. Rev. Lett. **83**, 436 (1999)] besagt, dass eine Transformation zu einem anderen reinen Quantenzustand $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ mit Wahrscheinlichkeit 1 genau dann möglich ist, wenn die Eigenwerte $(\lambda_1^\psi \geq \lambda_2^\psi \geq \cdots \geq \lambda_N^\psi)$ von ρ_A^ψ durch die Eigenwerte $(\lambda_1^\phi \geq \lambda_2^\phi \geq \cdots \geq \lambda_N^\phi)$ von ρ_A^ϕ majorisiert werden, d.h.

$$\sum_{n=1}^{k} \lambda_n^\psi \leq \sum_{n=1}^{k} \lambda_n^\phi \quad \forall k \in \{1, \ldots, N\}.$$

a) Betrachten Sie den Zustand

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{|0\rangle_A - |1\rangle_A}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle_B + \sqrt{\frac{1}{3}} |2\rangle_A \otimes |2\rangle_B .$$

Alice führt nun eine projektive Messung mit den Projektionsoperatoren $P_0 = |0\rangle_{A\,A}\langle 0| + |2\rangle_{A\,A}\langle 2|$ und $P_1 = \mathbb{1} - P_0 = |1\rangle_{A\,A}\langle 1|$ aus. Welche Zustände $|\psi_0\rangle$ und $|\psi_1\rangle$ werden dadurch mit welcher Wahrscheinlichkeit erzeugt? Bestimmen Sie die Eigenwerte von ρ_A^ψ, $\rho_A^{\psi_0}$ und $\rho_A^{\psi_1}$ und die zugehörigen Von-Neumann-Entropien. Entscheiden Sie mit Hilfe des Nielsen-Theorems, ob eine Transformation $|\psi\rangle \mapsto |\psi_{0,1}\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit 1 mittels LOCC möglich ist.

b) Betrachten Sie nun die Zustände

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{15}{32}} \big[\, |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B \,\big] + \frac{1}{\sqrt{32}} \big[\, |2\rangle_A \otimes |2\rangle_B + |3\rangle_A \otimes |3\rangle_B \,\big],$$

$$|\phi\rangle = \sqrt{\frac{3}{4}} |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + \frac{1}{\sqrt{8}} \big[\, |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B + |2\rangle_A \otimes |2\rangle_B \,\big].$$

Ist $|\psi\rangle \mapsto |\phi\rangle$ oder $|\phi\rangle \mapsto |\psi\rangle$ mittels LOCC und mit Wahrscheinlichkeit 1 möglich? Ist die Abbildungen $|\psi\rangle \otimes |\chi\rangle \mapsto |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle$ auf diese Art möglich? Dabei ist

$$|\chi\rangle = \sqrt{\frac{3}{4}} |\uparrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B + \frac{1}{2} |\downarrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B$$

ein weiterer zwischen A und B verschränkter Zustand.

Aufgabe 37: Singulett-Zustand (4 Punkte)

Betrachten wir den Singulett-Zustand von zwei Spins 1/2:

$$|\Psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2).$$

a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)|\Psi_-\rangle = 0$. Hier ist $\boldsymbol{\sigma}_i$ der Pauli-Matrizen-Vektor für Qubit i, $\boldsymbol{\sigma}_i = (\sigma_{i,x}, \sigma_{i,y}, \sigma_{i,z})$.

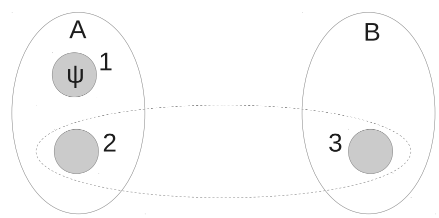
b) (1 Punkt) Was bekommt man für $\langle\Psi_-|\boldsymbol{\sigma}_{1(2)}|\Psi_-\rangle$?

c) (2 Punkte) Benutzen Sie das Ergebnis aus a) und b) um zu zeigen, dass

$$\langle\Psi_-|(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1)(\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)|\Psi_-\rangle = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{m}},$$

wo $\hat{\mathbf{n}}$ und $\hat{\mathbf{m}}$ zwei dreidimensionale Einheitsvektoren sind.

Aufgabe 38 : Quantenteleportation (6 Punkte)



Alice möchte den Inhalt ihres Qubits $|\psi\rangle_1$ an Bob senden (teleportieren). Dafür teilen sich Alice und Bob zwei verschränkte Qubits (2 und 3, siehe Abb.) und wollen nun, dass Bobs Qubit (3) in den Zustand $|\psi\rangle_3$übergeht. Betrachten Sie den Quantenzustand $|\psi\rangle = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle$ mit $|a|^2 + |b|^2 = 1$ und bilden Sie den Zustand $|\phi\rangle = |\psi\rangle_1 \otimes |\Phi_+\rangle_{23}$.

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $|\phi\rangle$ sich als

$$\begin{aligned}|\phi\rangle = &\frac{1}{2}\,|\Phi_+\rangle_{12} \otimes (a\,|0\rangle + b\,|1\rangle)_3 + \frac{1}{2}\,|\Phi_-\rangle_{12} \otimes (a\,|0\rangle - b\,|1\rangle)_3 \\ &+ \frac{1}{2}\,|\Psi_+\rangle_{12} \otimes (a\,|1\rangle + b\,|0\rangle)_3 + \frac{1}{2}\,|\Psi_-\rangle_{12} \otimes (a\,|1\rangle - b\,|0\rangle)_3\end{aligned}$$

schreiben lässt. $|\Phi_\pm\rangle = \frac{|00\rangle \pm |11\rangle}{\sqrt{2}}$ und $|\Psi_\pm\rangle = \frac{|01\rangle \pm |10\rangle}{\sqrt{2}}$ sind hier die *Bell-Zustände* und bilden zusammen die *Bell-Basis*.

b) (2 Punkte) Zeigen Sie, wie eine Messung der zwei ersten Qubits von $|\phi\rangle$ verwendet werden kann, um den Zustand $|\psi\rangle$ als drittes Qubit zu bekommen.

c) (2 Punkte) Nehmen Sie an, dass die direkte Erzeugung von Verschränkung nur über einen maximalen Abstand l möglich wäre. Betrachten Sie die Situation, in der Alice und Bob sich in der Entfernung $2l$ von einander befinden. Dazwischen befindet sich ihr Freund Carl. Alice und Carl teilen sich jetzt ein Qubitpaar in einem Bell-Zustand und Bob und Carl ein anderes. Der Gesamtzustand lautet also $|\Phi_+\rangle \otimes |\Phi_+\rangle$. Zeigen Sie, dass durch Kenntnis über das Ergebnis einer Messung in der Bell-Basis von Carls zwei Qubits und lokale Operationen, ein Qubitpaar in einem Bell-Zustand zwischen Alice und Bob erzeugt werden kann.