UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Mónica Benito
https://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/19W-QI

Quanteninformationstheorie
Wintersemester 2019/2020 - Übungsblatt 10
Ausgabe: 10.1.2020, Abgabe: 17.1.2020, Übungen: 20.1.2020

Aufgabe 33: 2-Qubit Zeitentwicklung (4 Punkte)

Die Zeitentwicklung eines Zwei-Qubit-Systems sei durch folgenden Hamiltonoperator gegeben:

$$H = \sigma_{1,x} \otimes \sigma_{2,x} + \sigma_{1,y} \otimes \sigma_{2,y} + \sigma_{1,z} \otimes \sigma_{2,z}$$

(in dimensionslosen Einheiten). Für $t = 0$ ist die gesamte Dichtematrix $\rho(0) = \rho_1(0) \otimes \rho_2(0)$, mit $\rho_2(0) = |0\rangle\langle 0|$.
a) (2 Punkte) Berechnen Sie die Kraus-Operatoren für die Entwicklung von $\rho_1(t)$,

$$\rho_1(t) = \Lambda_t \rho_1(0) ,$$

und plotten Sie die Population des angeregten Zustandes $|1\rangle$ als Funktion von t. Wäre die Markov-Näherung hier gerechtfertigt?
b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\Lambda_{t_1+t_2}\rho_1(0) \neq \Lambda_{t_2}\Lambda_{t_1}\rho_1(0)$ und geben Sie eine Begründung.

Aufgabe 34: Verschränkung und lokale Operationen (6 Punkte)

Es sei der folgende Zustand im Raum $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ gegeben:

$$|\psi\rangle = \cos\alpha\, |00\rangle + \sin\alpha\, |11\rangle .$$

a) (1 Punkt) Berechnen Sie die Von-Neumann-Entropie $S(\rho_A)$ von $\rho_A = \mathrm{Tr}_B\, |\psi\rangle \langle\psi|$. Plotten Sie $S(\rho_A)$ als Funktion von α für $\alpha \in [0, \pi]$

b) (1 Punkt) Betrachten Sie die Transformation $U = U_A \otimes \mathbb{1}_B$ mit $U_A = \sigma_x$. Berechnen Sie explizit die Von-Neumann-Entropie von ρ'_A, die dem Zustand $|\psi'\rangle = U\, |\psi\rangle$ entspricht.

c) (2 Punkte) Betrachten Sie die folgende POVM auf $\mathcal{H}_A$ mit $F_0 = \varepsilon\, |\phi\rangle \langle\phi|$ und $F_1 = \mathbb{1}_A - F_0$, wobei $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_A + |1\rangle_A\right)$ und $0 < \epsilon \leq 1$. Es wird eine nicht selektive Messung durchgeführt. Berechnen Sie die Von-Neumann-Entropie $S(\rho''_A)$ von $\rho''_A = \sum_{i=0,1} M_i \rho_A M_i^\dagger$, wobei $M_i = \sqrt{F_i}$. Vergleichen Sie $S(\rho''_A)$ und $S(\rho_A)$.

d) (2 Punkte) Jetzt wird eine selektive Messung in dem Zustand $|1\rangle_A$ durchgeführt, so dass $\rho'''_A = M_1 \rho_A M_1^\dagger / \mathrm{Tr}(F_1 \rho_A)$. Berechnen Sie $S(\rho'''_A)$ und plotten Sie sie in Abhängigkeit von ε für $\alpha = \pi/6$.

Aufgabe 35 : Verschränkung von drei Teilsystemen *(tripartite entanglement)*

a) Betrachten Sie den Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) Zustand

$$|G\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|000\rangle + |111\rangle \right).$$

Zeigen Sie, dass dieser Zustand im Bezug auf jede zwei Teilsysteme einen gemischten Zustand darstellt, der nicht verschränkt ist. Überzeugen Sie sich dann, dass bei einer projektiven Messung an einem der Teilsysteme in einem der Zustände $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ die Verschränkung auch verloren geht (der resultierende Zwei-Qubit-Zustand nicht verschränkt ist).

b) Wie sieht es beim sogenannten W-Zustand

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle \right)$$

aus?