UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Mónica Benito
https://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/19W-QI

Quanteninformationstheorie
Wintersemester 2019/2020 - Übungsblatt 1
Ausgabe: 25.10.2019, Abgabe: 31.10.2019 (direkt an die Tutoren), Übungen: 4./7.11.2019

Aufgabe 1 : Logarithmen (3 Punkte)

a) (1 Punkt) Leiten Sie die Sterlingformel

$$\ln n! \approx n \ln n - n$$

für $n \to \infty$ her. Betrachten Sie dafür $\ln n!$ als Abschätzung eines Integrals und berechnen Sie dieses Integral exakt.

b) (1 Punkt) Drücken Sie die Sterlingformel mit $\log_2 n$ statt $\ln n$ aus.

c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Entropie einer vollkommen ungerechten Münze null ist, d. h.,

$$\lim_{p \to 0} \{-p \log p - (1-p) \log(1-p)\} = 0.$$

Aufgabe 2 : Warscheinlichkeiten und Entropie

a) Aus einem Topf mit zwei blauen und drei roten Kugeln werden zwei gezogen (ohne Zurücklegen). Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden blau sind?

b) Ein Kartendeck mit n Karten in der Reihenfolge $1, 2, \ldots, n$ wird erstellt. Eine Karte wird zufällig entfernt und zufällig an einem anderen Platz im Deck plaziert. Was ist die Entropie des finalen Decks?

Aufgabe 3 : Konkavität der Shannon-Entropie

a) Zeigen Sie die Konkavität der Shannon-Entropie, d. h., beweisen Sie für zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen p_1 und p_2 über dasselbe Alphabet X, dass die Shannon-Entropie $H(p) = -\sum_{x \in X} p(x) \log p(x)$ für die gemischte Wahrscheinlichkeitsverteilung p, gegeben durch $p(x) = wp_1(x) + (1-w)p_2(x)$, die Ungleichung

$$H(p) \geq wH(p_1) + (1-w)H(p_2) \tag{1}$$

erfüllt wobei $0 \leq w \leq 1$. Sie dürfen verwenden, dass eine Funktion mit nicht positiver zweiter Ableitung konkav ist.

b) Zeigen Sie, dass das Gleichheitszeichen in der Ungleichung (1) nur gilt, wenn $p_1 = p_2$ oder $w \in \{0, 1\}$.

c) Wir betrachten nun ein Bit, d. h. $X = \{0, 1\}$. Stellen Sie H als Funktion der Wahrscheinlichkeit $p(0)$ grafisch dar. Veranschaulichen Sie nun die Konkavität der Shannon-Entropie, indem

Sie die Werte für $H(wp_1 + (1-w)p_2)$ und $wH(p_1) + (1-w)H(p_2)$ für ein $w \in (0,1)$ und zwei Wahrscheinlichkeiten $0 < p_1(0) < p_2(0) < 1$ einzeichnen.

Aufgabe 4 : Shannon-Entropie für zwei Ereignisse (4 Punkte)

Sei p die Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine Botschaft der Länge 2 wobei das erste Zeichen, x, aus dem Alphabet X und das zweite, y, aus dem Alphabet Y stammt. Die Zeichenkombination x, y tritt mit der Wahrscheinlichkeit $p(x,y)$ auf. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen p_x und p_y für die einzelnen Symbole sind dann gegeben durch $p_x(x) = \sum_{y \in Y} p(x,y)$ und $p_y(y) = \sum_{x \in X} p(x,y)$.

a) (2 Punkte) Beweisen Sie $H(p) \geq H(p_x), H(p_y)$.

b) (2 Punkte) Wann gilt $H(p) = H(p_x)$?

Aufgabe 5 : Shannon-Theorem I (3 Punkte)

a) (1 Punkt) Wieviele Permutationen von n Objekten gibt es, wenn jeweils n_i $(i = 1, 2, \ldots k)$ Objekte identisch sind?

b) (2 Punkte) Schätzen Sie basierend auf der Buchstabenhäufigkeit (https://de.wikipedia.org/wiki/Buchstabenhäufigkeit) ab, wieviele Typische Botschaften der Länge 100 es gibt. Um welchen Faktor kann man eine lange Datei mit einem deutschsprachigen Text komprimieren?

Hinweis: *Übertragen Sie die Tabelle mit den Häufigkeitsangaben in eine Excel-Datei (oder verwenden Sie eine ähnliche Software), um die anschließende Rechnung durchzuführen.*