UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
M. Kizmann
http://tinyurl.com/QCQS20

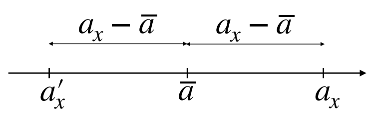
Quantencomputing und Quantensimulation
Sommersemster 2020 - Übungsblatt 9
Ausgabe: 19.06.2020, Abgabe: 26.06.2020, Übungen: 30.06/02.07.2020

Aufgabe 22: Algebraische Interpretation des Grover-Algorithmus (3 Punkte)

Betrachten Sie den Grover-Algorithmus mit $U_s = 2\,|s\rangle\langle s| - \mathbb{1}$ und $|s\rangle = N^{-1/2}\sum_{x=0}^{N-1}|x\rangle$.
a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass

$$U_s = \frac{2}{N}\sum_{x,y=0}^{N-1}|x\rangle\langle y| - \mathbb{1}.$$

b) (1 Punkt) Betrachten Sie einen beliebigen Zustand $|\psi\rangle = \sum_{x=0}^{N-1} a_x\,|x\rangle$. Die mittlere Amplitude $\overline{a}$ des Zustands $|\psi\rangle$ wird definiert als $\overline{a} = N^{-1}\sum_{x=0}^{N-1} a_x$. Des Weiteren definieren wir die Operation R der Inversion über das Mittel durch $R\,|\psi\rangle = \sum_{x=0}^{N-1} a'_x\,|x\rangle$ mit $a'_x = a_x - 2(a_x - \overline{a})$ (siehe Skizze). Zeigen Sie, dass $U_s\,|\psi\rangle = R\,|\psi\rangle$.



c) (1 Punkt) Gegeben sei $N = 4$. Skizzieren Sie den Zustand $|s\rangle$ als Balkendiagramm, wobei die verschiedenen Zustände auf der x-Achse beschrieben werden und ihre Amplituden auf der y-Achse (das funktioniert da hier ausschließlich reale Amplituden betrachtet werden). Skizzieren Sie dann sowohl $U_a\,|s\rangle = (\mathbb{1} - 2\,|x_a\rangle\langle x_a|)\,|s\rangle$ mit $|x_a\rangle = |01\rangle$ als auch $U_sU_a\,|s\rangle$.

Aufgabe 23: Kollisionsproblem (7 Punkte)

Gegeben sie eine zwei-zu-eins Funktion $F: X \to Y$, bei der jeweils genau zwei Elemente $x_0, x_1 \in X$ den gleichen Funktionswert $F(x_0) = F(x_1)$ besitzen. Des Weiteren beinhalte die Menge X N Elemente. Es soll nun eine Kollision, d.h. ein solches Paar mit dem gleichen Funktionswert gefunden werden. Es lässt sich zeigen, dass klassisch $O(\sqrt{N})$ Aufrufe der Funktion F nötig sind, um ein solches Paar mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% zu erhalten (siehe Geburtstagsparadoxon).

a) (1 Punkt) Beschreiben Sie einen Quantenalgorithmus zur Lösung dieses Problems. Wie viele Aufrufe der Funktion F (in Groß-O-Notation) sind in diesem Fall notwendig? Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem klassischen Algorithmus.

Im Folgenden soll ein hybrider Algorithmus bestehend aus einem klassischen und einem quantenmechanischen Teil betrachtet werden. Dazu wird zunächst eine zufällige Teilmenge $K \subset X$ mit k Elementen gebildet und eine Liste aus den Paaren $(x, F(x))$ mit $x \in K$ erstellt, welche nach den Werten $F(x)$ sortiert wird.

b) (1 Punkt) Wie viele Aufrufe der Funktion F (in Groß-O-Notation) werden zur Erstellung dieser Liste benötigt?

Erhält man bereits eine Kollision in dieser Liste, so wird der Algorithmus beendet. Im wahrscheinlicheren Fall, dass keine Kollision in K vorliegt, wird nun der Grover Algorithmus angewendet. Hierbei wird die Menge X nach Elementen $x_1 \notin K$ durchsucht, für die $F(x_1) = F(x)$ mit $x \in K$ gilt. Als letzter Schritt wird dann der Funktionswert $F(x_1)$ berechnet und die klassisch erstellte Liste nach dem Wert x_0 mit $F(x_0) = F(x_1)$ durchsucht. Als Lösung wird dann das Paar $\{x_0, x_1\}$ angegeben.

c) (2 Punkt) Wie viele solcher Elemente x_1 gibt es? Wie oft muss die Funktion F in diesem Fall (in Groß-O-Notation) aufgerufen werden?

d) (2 Punkte) Wie viele Aufrufe der Funktion (in Groß-O-Notation) werden also insgesamt benötigt? Berechnen Sie optimale Größe k_{op} der Menge K. Wie skaliert k_{op} mit N? Vergleichen Sie jeweils mit dem rein klassischen und dem rein quantenmechanischen Algorithmus.

e) (1 Punkt) Für welche spezielle Funktionen F kann ein Quanten-Algorithmus verwendet werden welcher nur $O(\log N)$ Aufrufe der Funktion F benötigt? Was ist der Grund für diese Verbesserung?