UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
M. Kizmann
http://tinyurl.com/QCQS20

Quantencomputing und Quantensimulation
Sommersemster 2020 - Übungsblatt 4
Ausgabe: 15.05.2020, Abgabe: 22.05.2020, Übungen: 26./28.05.2020

Aufgabe 10: Messungen in verschiedenen Basen (5 Punkte)

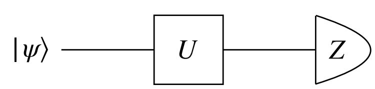
Betrachten Sie die Messung eines Qubits entlang des Vektors $\boldsymbol{v} = (\sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\theta))^T$, gegeben durch

$$\langle\Psi|\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}\, |\Psi\rangle . \tag{1}$$

a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass sich diese Messung mithilfe der unitären Abbildung

$$U = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2)e^{-i\varphi} \\ \sin(\theta/2)e^{i\varphi} & -\cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

durch folgenden Schaltkreis darstellen lässt.



Hinweis: Wie sieht der Erwartungswert für die dargestellte Schaltung aus? Vergleichen Sie diesen mit dem Erwartungswert in Gleichung (1).

b) (2 Punkte) Jede unitäre Abbildung kann durch eine Rotation in Form von $U = e^{i\alpha} R_{\boldsymbol{n}}(\beta)$ dargestellt werden. Bestimmen Sie α, β und $\boldsymbol{n}$, welche die unitäre Abbildung aus Teilaufgabe a) erzeugen. Drücken Sie $\boldsymbol{n}$ in Kugelkoordinaten aus und vergleichen Sie das Ergebnis mit $\boldsymbol{v}$.

c) (1 Punkt) Gegeben sei ein allgemeiner Zwei-Qubit Zustand der Form

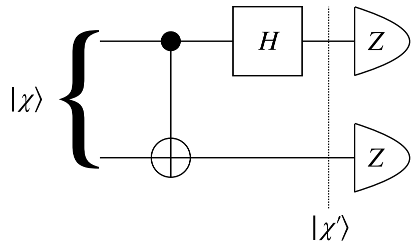
$$|\chi\rangle = \alpha\,|00\rangle + \beta\,|01\rangle + \gamma\,|10\rangle + \delta\,|11\rangle .$$

Stellen Sie $|\chi\rangle$ in der Basis der Bell-Zustände

$$\left|\Phi^+\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right), \qquad \left|\Phi^-\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle - |11\rangle\right),$$
$$\left|\Psi^+\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle + |10\rangle\right), \qquad \left|\Psi^-\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle - |10\rangle\right),$$

dar. Mit welchen Wahrscheinlichkeiten werden die verschiedenen Bell-Zustände gemessen?

d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass sich eine Messung in der erwähnten Bell-Basis durch unten abgebildeten Schaltkreis darstellen lässt. Berechnen Sie dazu den Zustand $|\chi'\rangle$ und vergleichen Sie diesen mit dem Ausdruck für $|\chi\rangle$ in der Bell-Basis aus Teilaufgabe c). Mit welchen Wahrscheinlichkeiten werden bei dieser Schaltung die einzelnen Ergebnisse gemessen?



Aufgabe 11: Bernstein-Vazirani Algorithmus (4 Punkte)

Gegeben sei eine Bitkette s der Länge n und eine Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ mit $f(x) = x \cdot s$, wobei $x \cdot s = \sum_{i=0}^{n-1} x_i s_i \bmod 2$ die bitweise Multiplikation beschreibt.
a) (2 Punkte) Nehmen Sie an, dass s insgesamt n_1 Bits mit einer 1 und $n_0 = n - n_1$ Bits mit einer 0 enthält. Beweisen Sie, dass $f(x)$ ausgeglichen ist, falls $n_1 > 0$ ist. Berechnen Sie dazu die Anzahl an Bitketten x, für die $f(x) = 0$ gilt.
Hinweis: Um $x \cdot s = 0$ zu erhalten müssen entweder keine, oder eine gerade Anzahl an Bitstellen im Zustand 1 in x und s übereinstimmen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, dass $2k$ Bitstellen mit Zustand 1 in x und s übereinstimmen? Verwenden Sie die Formel

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n_1/2 \rfloor} \frac{n_1!}{(2k)!(n_1 - 2k)!} = 2^{n_1 - 1},$$

wobei $\lfloor n_1/2 \rfloor$ das abgerundete Ergebnis von $n_1/2$ beschreibt.

b) (1 Punkt) Begründen Sie, warum aus der Ausgeglichenheit von $x \cdot s$ für $n_1 > 0$

$$\sum_{x \in \{0.1\}^n} \frac{(-1)^{x \cdot (z \oplus s)}}{2^n} = \delta_{z,s}$$

folgt.

c) (1 Punkt) Die Identität aus Teilaufgabe b) kann auch mithilfe folgender Eigenschaft der Hadamard-Gatter hergeleitet werden:

$$H^{\otimes n} H^{\otimes n} \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x \in \{0.1\}^n} |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x \in \{0.1\}^n} |x\rangle .$$

Woraus lässt sich diese Eigenschaft der Hadamard-Gatter herleiten? Benutzen Sie diese Eigenschaft, um die Identität aus Teilaufgabe b) zu beweisen.

Aufgabe 12: Simon-Problem (4 Punkte)

Betrachten Sie eine Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ für die $f(x) = f(y)$ gilt, falls $y = x \oplus a$. Mithilfe eines quantenmechanischen Algorithmus erhält man Zustände $|y\rangle$, für welche $y \cdot a = 0$ gilt. Misst man dann $n - 1$ linear unabhängige y, so kann daraus ein Gleichungssystem gebildet werden, durch das sich a bestimmen lässt.
a) (1 Punkt) Wie viele verschiedene Bitketten y erfüllen die Gleichung $y \cdot a = 0$?
Hinweis: Erinnern Sie sich daran, dass die Funktion $f(x) = a \cdot x$ für gegebene a ausgeglichen ist.

b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit $n - 1$ linear unabhängige Bitketten y zu messen durch

$$
\begin{aligned}
P[n-1 \text{ linear unabh. } y] &= \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}\frac{2^{n-1}-2}{2^{n-1}} \dots \frac{2^{n-1}-2^{n-2}}{2^{n-1}} \\
&= \Pi_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)
\end{aligned}
$$

gegeben ist. Der erste Multiplikator stellt hierbei die Wahrscheinlichkeit dar, das erste linear unabhängige y zu erhalten, der zweite Multiplikator das zweite linear unabhängige y zu erhalten u.s.w.
Hinweis: Eine Bitkette y_3 ist linear unabhängig von den Bitketten y_2 und y_1, falls $y_3 \neq by_2+cy_1$ für alle $b, c \in \{0,1\}$. Wenn Sie k linear unabhängige Bitketten haben, wie viele dazu linear abhängige Bitketten gibt es dann?

c) (1 Punkt) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit ab, nach $n-1$ Messungen $n-1$ linear unabhängige Gleichungen für a zu erhalten.