UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
M. Kizmann
http://tinyurl.com/QCQS20

Quantencomputing und Quantensimulation
Sommersemester 2020 - Übungsblatt 11
Ausgabe: 03.07.2020, Abgabe: 10.07.2020, Übungen: 14./16.07.2020

Aufgabe 26: Jordan-Wigner Transformation (8 Punkte)

In der Vorlesung wurde die Jordan-Wigner Transformation eingeführt, um fermionische Systeme in Spin-Systeme zu übersetzen, welche durch einen Quantencomputer simuliert werden können. Dazu wird der Zustand ohne Teilchen als ein Spin up und der Ein-Teilchenzustand als ein Spin down Zustand simuliert,

$$|0\rangle = a\,|1\rangle \equiv |\uparrow\rangle\,, \quad |1\rangle = a^\dagger\,|0\rangle \equiv |\downarrow\rangle\,.$$

Damit erhalten wir auf den ersten Blick eine Äquivalenz zwischen den Leiteroperatoren der Spin Zustände $\sigma_\pm = 1/2(\sigma_x \pm i\sigma_y)$ und den Erzeugern und Vernichtern der Fermionen $a^{(\dagger)}$,

$$a \equiv \sigma_+, \quad a^\dagger \equiv \sigma_-.$$

a) (1 Punkt) Benutzen Sie $[\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_z$ um zu zeigen, dass $1 - 2a^\dagger a \equiv \sigma_z$.

Betrachten wir nun Fermionen auf einer Kette. Hierbei zeigt sich dass die obige Äquivalenz nicht mehr funktioniert, da die Erzeuger und Vernichter für verschiedene Gitterplätze ($i \neq j$) antikommutieren, während die Leiteroperatoren für verschiedene Gitterplätze kommutieren,

$$a_i^\dagger a_j^\dagger = -a_j^\dagger a_i^\dagger \quad \leftrightarrow \quad \sigma_{i,-}\sigma_{j,-} = \sigma_{j,-}\sigma_{i,-}.$$

Um auch diese Eigenschaft durch die Spin-Operatoren auszudrücken, wird die Transformation

$$a_i \to \sigma_{i,+} \otimes_{k=1}^{i-1} \sigma_{k,z}, \quad a_i^\dagger \to \sigma_{i,-} \otimes_{k=1}^{i-1} \sigma_{k,z}$$

durchgeführt. Wir erhalten also eine Phase von -1 pro Spin down Zustand auf den Gitterplätzen vor i.

b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass dadurch die kanonischen Antikommutationsregeln $\{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{i,j}$ und $\{a_i, a_j\} = 0$ erhalten bleiben.

c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $a_n^\dagger a_{n+1} \equiv \sigma_{n,-}\sigma_{n+1,+}$.

d) (1 Punkt) Benutzen Sie die Jordan-Wigner Transformation, um den fermionischen Hamiltonoperator

$$H = \sum_n J_z \left(1 - 2(a_n^\dagger a_n + a_{n+1}^\dagger a_{n+1}) - 4a_n^\dagger a_{n+1}^\dagger a_n a_{n+1}\right) + \frac{J_\perp}{2}\left(a_n^\dagger a_{n+1} + a_{n+1}^\dagger a_n\right)$$

in die Form

$$H = \sum_n J_z \sigma_{n,z}\sigma_{n+1,z} + \frac{J_\perp}{2}\left(\sigma_{n,-}\sigma_{n+1,+} + \sigma_{n,+}\sigma_{n+1,-}\right)$$

zu bringen.

Für die Jordan-Wigner Transformation wird die Besetzungszahlbasis benutzt. Eine alternative Abbildung ist durch die Verwendung der sogenannten Paritätsbasis gegeben. In der Paritätsbasis ist der Zustand des i-ten Qubits q_i durch die Formel $q_i = \sum_{j<i} f_j \bmod 2$ gegeben, wobei f_i den Zustand des i-ten Qubits in der Besetzungszahlbasis ($f_i = 1$ falls ein Fermion sich auf diesem Gitterplatz befindet) beschreibt. Man erhält als alternative Abbildung die Transformation

$$a_i \to \otimes_{k=0}^{M-i-1} \sigma_{M-k,x}\sigma_{i,x}\sigma_{i-1,z} + i \otimes_{k=0}^{M-i-1} \sigma_{M-k,x}\sigma_{i,y},$$
$$a_i^\dagger \to \otimes_{k=0}^{M-i-1} \sigma_{M-k,x}\sigma_{i,x}\sigma_{i-1,z} - i \otimes_{k=0}^{M-i-1} \sigma_{M-k,x}\sigma_{i,y}$$

d) (1 Punkt) Beschreiben Sie den in der Besetzungszahlbasis gegebenen Zustand $|10100111\rangle$ in der Paritätsbasis.

e) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass auch diese Transformation die kanonischen Antikommutationsregeln $\{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{i,j}$ und $\{a_i, a_j\} = 0$ erhält.

Aufgabe 27: Teilchensimulation in einer Dimension (3 Punkte)

Wir betrachten die Simulation eines Teilchens in einer Dimension mit dem Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2}p^2 + V(x).$$

Um den Hamiltonoperator durch einen Schaltkreis zu simulieren wird der Raum diskretisiert, wodurch wir den (dimensionslosen) Ortsoperator $x = \sum_x x\,|x\rangle\langle x|$ und den genäherten (dimensionslosen) Impulsoperator $p = -\frac{i}{2}\sum_x (|x+1\rangle\langle x| - |x-1\rangle\langle x|)$ erhalten (x repräsentiert hier eine Binärzahl, wobei $x\Delta x = xL/2^n$ den tatsächlichen Ort beschreibt). Ein allgemeiner Zustand $|\psi\rangle$ kann dann durch $|\psi\rangle = \sum_x \psi(x\Delta x)\,|x\rangle$ beschrieben werden, wobei $\psi(x\Delta x)$ die Wellenfunktion darstellt.
a) (1 Punkt) Gegeben Sei der Zustand $|p\rangle = U_{QFT}\,|x\rangle$ mit $U_{QFT} = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_y e^{2\pi i x y/2^n}\,|y\rangle\langle x|$. Berechnen Sie $p\,|p\rangle$ sowohl für den exakten Operator $p = -i\partial_x$ als auch dessen diskretisierte Näherung und vergleichen Sie die Ergebnisse.

b) (2 Punkte) Zur Implementierung der Wirkung des Potentials wird die unitäre Abbildung

$$U_V:\ |x\rangle\,|y\rangle \to |x\rangle\,|y \oplus \Delta t V(x)\rangle$$

verwendet. Zeigen Sie, dass der abgebildete Schaltkreis den Zustand

$$U_V\,|\psi(0)\rangle\, U_{QFT}^\dagger\,|1\rangle = \sum_{x=1}^{2^n-1} \langle x|\psi(0)\rangle\, e^{-2\pi i \Delta t V(x)/2^t}\,|x\rangle\, U_{QFT}^\dagger\,|1\rangle$$

erzeugt.