UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
M. Kizmann
http://tinyurl.com/QCQS20

Quantencomputing und Quantensimulation
Sommersemster 2020 - Übungsblatt 10
Ausgabe: 26.06.2020, Abgabe: 03.07.2020, Übungen: 07./09.07.2020

Aufgabe 24: Landau-Zener-Formel (5 Punkte)

Gegeben sei ein Hamiltonoperator eines Zwei-Niveau-Systems (Qubits),

$$H(t) = \begin{pmatrix} \frac{-\alpha t}{2} & V \\ V & \frac{\alpha t}{2} \end{pmatrix}.$$

a) (1 Punkt) Skizzieren Sie die Zeitabhängigkeit der beiden Energieniveaus des Hamiltonians einmal für $V = 0$ und einmal für ein beliebiges $V > 0$.

b) (1 Punkt) Nehmen Sie an, dass die Wellenfunktion durch $|\psi(t)\rangle = (c_1(t), c_2(t))^T$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass die Koeffizienten der Wellenfunktion für den Fall $V = 0$ durch $c_{1/2}(t) = c_{1/2}(0)\exp\left(\pm\frac{i\alpha t^2}{4\hbar}\right)$ gegeben sind.

c) (1 Punkt) Wir betrachten nun den Fall $V > 0$. Um eine Näherung zu erhalten benutzen wir die Lösung aus Teilaufgabe b) und variieren die Parameter $c_{1/2}(0)$,

$$c_{1/2}(t) = \tilde{c}_{1/2}(t)\exp\left(\pm\frac{i\alpha t^2}{4\hbar}\right).$$

Zeigen Sie, dass man damit die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\tilde{c}_1(t)}{\partial t} &= \tilde{c}_2(t)V\exp\left(-\frac{i\alpha t^2}{2\hbar}\right) \\ i\hbar\frac{\partial\tilde{c}_2(t)}{\partial t} &= \tilde{c}_1(t)V\exp\left(\frac{i\alpha t^2}{2\hbar}\right) \end{aligned}$$

erhält.

d) (2 Punkte) Nehmen Sie an, dass das System sich zunächst im unteren Energielevel befindet, $c_2(t\to-\infty) = 1$. Benutzen Sie dann die Näherung $\tilde{c}_2(t) \approx 1$, um $\tilde{c}_1(t\to\infty)$ zu erhalten. Berechnen Sie die daraus die erste Korrektur zu $|c_2(t\to\infty)|^2$. Was wird durch $|c_2(t\to\infty)|^2$ beschrieben? Vergleichen Sie die erhaltene Lösung mit der exakten Lösung

$$|c_2(t\to\infty)|^2 = \exp\left(-\frac{2\pi V^2}{\hbar\alpha}\right).$$

Hinweis: Verwenden Sie $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\exp(-ax^2) = \sqrt{\pi/a}$.

<u>Aufgabe 25:</u> Trotter-Suzuki Formel (5 Punkte)

Gegeben sei ein Hamiltonian $H = A + B$ mit $[A, B] \neq 0$. Wir wollen nun den entsprechenden Zeitentwicklungsoprator $U(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Ht\right)$ dieses Hamlitonians mithilfe der Trotter-Suzuki Formel berechnen.

a) (1 Punkt) Vergleichen Sie den gegebenen Zeitentwicklungsoperator mit der genäherten Form $U_{TS}(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}At\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}Bt\right)$. Zeigen Sie, dass die beiden Zeitentwicklungsoperatoren bis auf Terme der Ordnung $\mathrm{O}(t^2)$ identisch sind. $U_{TS}(t)$ kann also als lineare Näherung für $U(t)$ betrachtet werden.

b) (1 Punkt) Welchen Vorteil hat $U_{TS}(t)$ gegenüber der direkteren linearen Näherung $U(t) \approx \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}Ht$?

Hinweis: Welche Eigenschaften sollte ein Zeitentwicklungsoperator erfüllen?

c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $U(t)$ für beliebig lange Zeiten t durch $U(t) \approx U_{TS}(t/n)^n$ genähert werden kann.

Betrachten Sie nun die Drehung eines Qubits entlang der Achse $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^T$ mit einem Winkel von α, gegeben durch $U(\alpha) = \exp\left(-i\alpha\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2\right)$. Wir wollen nun die Trotter Suzuki-Formel verwenden, um diese Rotation durch alternierende Rotationen um die $\hat{\boldsymbol{x}}$- und $\hat{\boldsymbol{z}}$-Achse darzustellen.

d) (2 Punkt) Definieren Sie $U_{TS}(\alpha)$. Skizzieren Sie $\left|\langle +|\, U^\dagger(\alpha)U_{TS}(\alpha/n)^n \,|+\rangle\right|^2$ für drei verschiedene Drehwinkel α in Abhängigkeit zu n und diskutieren Sie die Ergebnisse.

Hinweis: 1 Punkt für drei verschiedene Drehwinkel mit $n = 1$ und ein Punkt für die Abhängigkeit von n. Die Abhängigkeit von n kann mithilfe von MATLAB oder MATHEMATICA berechnet werden.