Physik I – Integrierter Kurs

Prof. G. Burkard, Prof. T. Dekorsy, Dr. Cs. Péterfalvi

Universität Konstanz

Übungsblatt Nr. 8, WS 15/16
Abgabe am 11.01.2016 in der Vorlesung
Besprechung am 13.01.2016 in der Übung

Aufgabe 1 (schriftlich): Komplexe Zahlen

i) Betrachten Sie die komplexe Funktion:

$$z(t) = Ae^{i\omega t} \quad \text{mit} \quad A = a + ib \quad \text{wo} \quad \omega, a, b \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie

a) die konjugiert-komplexe Funktion: $z^*(t)$.

b) den Betrag: $|z(t)|$.

c) den Realteil: $\mathrm{Re}(z(t))$.

d) den Imaginärteil: $\mathrm{Im}(z(t))$.

ii) Betrachten Sie die komplexe Zahl:

$$z = \sqrt[4]{a + ia} \quad (a \in \mathbb{R})$$

Berechnen Sie die Wurzeln und stellen Sie das Ergebnis grafisch dar.

iii) Zeigen Sie auf zwei verschiedene Arten, dass $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$.

a) Verwenden Sie die Beziehung $\sin(a) = \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}$, die aus der Euler Formel folgt.

b) Verwenden Sie die Taylorentwicklung um den Punkt $x = 0$.

(6 Punkte)

Aufgabe 2 (schriftlich) : Differentialgleichung 5. Ordnung

Gegeben sei die Differentialgleichung (DGL) der Form:

$$x^{(5)}(t) = 0.$$

$x^{(5)}$ meint hierbei die fünfte Ableitung nach der Zeit. Überlegen Sie sich, wie die allgemeine Lösung der DGL aussieht und bestimmen Sie die spezielle Lösung für die Anfangsbedingungen $x^{(n)}(0) = 1$, mit $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis.

(4 Punkte)

Hinweis: Versuchen Sie einen Potenzreihenansatz.

Aufgabe 3 (schriftlich): Aperiodischer Grenzfall

Betrachten Sie den eindimensionalen gedämpften harmonischen Oszillator, der durch die Differentialgleichung $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ beschrieben wird.

a) Betrachten Sie den aperiodischen Grenzfall $\omega_0 = \beta$. Der Ansatz in der Vorlesung liefert hier nur eine Lösung: $x_1(t) = ae^{-\beta t}$. Verwenden Sie den Ansatz $x(t) = a(t)e^{-\beta t}$ um eine weitere Lösung zu finden und geben Sie die allgemeine Lösung an.

b) Setzen Sie in die allgemeine Lösung für den aperiodischen Grenzfall die Anfangsbedingungen $x(t=0) = x_0 = 0$ und $v(t=0) = v_0$ ein.

c) Skizzieren Sie die Lösung für den aperiodischen Grenzfall, sowie die aus der Vorlesung bekannten Lösungen für die Fälle mit starker und schwacher Dämpfung.

(6 Punkte)

Aufgabe 4 (mündlich): Gedämpfter harmonischer Oszillator

Eine Christbaumkugel hängt an einer Feder (Federkonstante $\mathrm{D} = 5\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$) vom Christbaum in ein Glas mit Glühwein herab. Eine Katze spielt mit dem Christbaum, so dass die Christbaumkugel in eine gedämpfte Schwingung versetzt wird. Die Bewegung der Kugel wird durch die Gleichung $x(t) = Ae^{-\beta t}e^{\pm i\omega t}$ beschrieben (Abklingkoeffizient $\beta = 2.25 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{s}^{-1}$, Resonanzfrequenz der Christbaumkugel ohne Dämpfung $\omega_0 = 7.73$ Hz).

a) Bestimmen Sie das logarithmische Dekrement $\Lambda = -\ln(\hat{x}_{n+1}/\hat{x}_n)$. Hierbei bezeichnet $\hat{x}_{n+1}/\hat{x}_n < 1$ das Amplitudenverhältnis zweier aufeinander folgender Schwingungsmaxima.

b) Wie viel Prozent der Amplitude sind nach zwei Schwingungen noch vorhanden?

c) Wie viel mechanische Energie ist nach zwei Schwingungen in Wärmeenergie überführt worden, wenn die Feder zu Beginn der Schwingung um $x_0 = 10$ cm aus der Ruhelage ausgelenkt und dann losgelassen wird?

Wir wünschen ein frohes Weihnachtsfest und alles Gute für das Jahr 2016!

Ihr IK I - Team