Physik I – Integrierter Kurs
Prof. G. Burkard, Prof. T. Dekorsy, Dr. Cs. Péterfalvi

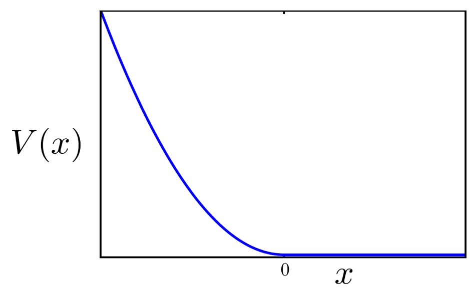
Universität Konstanz

Übungsblatt Nr. 6, WS 15/16
Abgabe am 07.12.2015 in der Vorlesung
Besprechung am 09.12.2015 in der Übung

Aufgabe 1 (schriftlich): Potential & Energieerhaltung

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich entlang der x-Achse in dem Potential $V(x)$ (siehe Abbildung)

$$V(x) = \begin{cases} \alpha m g x^2 & \text{für} \quad x \le 0 \\ 0 & \text{für} \quad x > 0. \end{cases}$$



a) Das Teilchen starte zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ bei $x_0 < 0$ und habe die Anfangsgeschwindigkeit $v(t_0) = 0$. Berechnen Sie die Gesamtenergie E. Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Systems mit Hilfe des Energiesatzes auf und lösen Sie die Differentialgleichung.

b) Berechnen Sie die kinetische und die potentielle Energie als Funktion der Zeit t, und zeigen Sie, dass die Gesamtenergie zeitlich konstant ist.

(5 Punkte)

Hinweis: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$

Aufgabe 2 (schriftlich): Mathematisches Pendel

Betrachten Sie ein mathematisches Pendel mit der Fadenlänge l und der Masse m, die sich in dem Potential $V(\varphi) = -mgl\cos(\varphi)$ bewegt. Dabei ist g die Erdbeschleunigung und φ die Winkelauslenkung des Massenpunktes m. Der Faden selbst werde als masselos angenommen.

a) Fertigen Sie eine Skizze an.

b) Stellen Sie den Energiesatz für den Massepunkt in ebenen Polarkoordinaten auf.

c) Lösen Sie mit Hilfe des Energiesatzes die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen. Verwenden Sie eine Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung um den auftretenden Cosinusterm anzunähern.

(5 Punkte)

Hinweis: Benutzen sie die Methode der Trennung der Variablen.

Aufgabe 3 (mündlich): Drehungen mit orthogonalen Matrizen

a) Betrachten Sie die Matrix

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{und den Vektor} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Wenden Sie die Matrix R auf den Vektor $\vec{v}$ an und zeigen Sie explizit, dass bei der Drehung die Länge des Vektors erhalten bleibt. Transponieren Sie die Matrix R und zeigen Sie, dass R^{T} den Vektor zurückdreht.

b) Wenden Sie zuerst die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ und dann die Matrix } B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

auf den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ an.

Berechnen Sie dann BA und wenden Sie dieses Matrixprodukt auf den selben Vektor an. Vergleichen Sie die zwei Ergebnisse. Berechnen Sie auch AB. Gilt $AB = BA$?

Die Identitätsmatrix in drei Dimensionen definieren wir durch

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Identitätsmatrix I Vektoren auf sich selbst abbildet und dass das Matrixprodukt von A mit I gleich A ist. Zeigen Sie durch $RR^{\mathrm{T}} = R^{\mathrm{T}}R = I$, dass R tatsächlich orthogonal ist.