Universität Konstanz

Integrierter Kurs Physik IV
Exp.-Teil – Atomphysik
SoSe 19

Prof. E. Weig, Anh-Tuan Le, Felix Rochau

Übungsblatt 12

Ausgabe: 01.07.2019, Abgabe: 08.07.2019

Aufgabe 33: Direkte Messung von Wellenfunktion (1 Häkchen)

Besorgen Sie sich folgenden wissenschaftlichen Artikel: J.S. Lundeen et al.: *Direct measurement of quantum wavefunction*, Nature, **474**, 188 (2011). (Ist im Uninetz oder mittels VPN-client kostenlos herunterladbar). Lesen Sie den Artikel und diskutieren sie darüber in der Übungsgruppe!

Aufgabe 34: Harmonischer Oszillator: Was eine Positionsmessung (nicht?) kann (1 Häkchen)

a) Berechnen Sie algebraisch (also nur mit Hilfe von Operatoren) die quantenmechanische Ortsunschärfe Δx des eindimensionalen Oszillators im Energie-Eigenzustand n. *Hinweise:* Drücken Sie den Positionsoperator $\hat{x}$ aus als Linearkombination der Operatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$. Das Gleiche funktioniert auch für $\hat{x}^2$. Aufgepasst beim Ausmultiplizieren von Summen aus Operatoren, die nicht vertauschen.

b) Angenommen ein Oszillator sei in einem bestimmten Energie-Eigenzustand. Kann eine Messung von x Aufschluss geben darüber, welcher das war? Liegt nach der Messung immer noch dieser bestimmte Energie-Eigenzustand vor? Was ist die fundamentale Begründung dafür?

Aufgabe 35: 3D-Oszillator in kartesischen und sphärischen Koordinaten (schriftlich) (10 Punkte)

Wir betrachten die Hamilton-Funktion eines isotropen harmonischen Oszillators in 3D

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m_\mathrm{e}} + \frac{1}{2}m_\mathrm{e}\omega^2\hat{r}^2,$$

wobei $\hat{r}^2 = \hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2$.

a) Schreiben Sie die Hamilton-Funktion als eine Summe von drei Operatoren. Wählen Sie diese drei Operatoren so, dass sie paarweise kommutieren, und Sie die Eigenwerte vom 1D-Problem kennen.

b) Folgern Sie daraus, dass die Energie $E = \hbar\omega(n_1 + n_2 + n_3 + 3/2)$ beträgt, wobei die verschiedenen n_i positive Ganzzahlen sind.

c) Welchen Entartungsgrad haben die vier ersten Energieniveaus?

Wir wollen jetzt dieses Ergebnis mit Hilfe der Ergebnisse der Bewegung in einem Zentralpotential berechnen. Wir führen die dimensionslosen Größen $\rho = r\sqrt{\frac{m_e\omega}{\hbar}}$ und $\epsilon = \frac{E}{\hbar\omega}$ ein.

d) Zeigen Sie, dass man die radiale Schrödinger-Gleichung in

$$\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\rho + \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} + \rho^2 - 2\epsilon\right) R_\ell(\rho) = 0. \tag{1}$$

umformulieren kann.

Man kann zeigen, dass die normierbaren Lösungen von Gleichung (1) von einer Ganzzahl n' abhängen

$$R_{n',\ell}(\rho) = \rho^\ell P_{n',\ell}(\rho) e^{-\rho^2/2}$$

wobei $P_{n',\ell}(\rho)$ ein Polynom von Grad $2n'$ ist. Diese Lösungen entsprechen bestimmten Werten von ϵ

$$\epsilon = 2n' + \ell + 3/2.$$

Ab jetzt setzen wir $n = 2n' + \ell$.

e) Finden Sie die Werte der Energieniveaus. Zeigen Sie, dass man drei Zahlen n, ℓ und m braucht, um die Zustände des Oszillators zu beschreiben (wie in Frage b)).

f) Legen Sie ausführlich die Zustände der vier ersten Energieniveaus dar, indem Sie die möglichen Werte der drei Quantenzahlen angeben. Zählen Sie den Entartungsgrad dieser vier Energieniveaus und überprüfen Sie, dass er mit Aufgabe c) übereinstimmt.
Bonus: Geben Sie den Entartungsgrad für das n-te Energieniveau an.

g) Geben Sie explizit die Beziehung zwischen $|n_1; n_2; n_3\rangle$ und $|n; \ell; m\rangle$ für $n = 1$ an.
Wiederholung: für einen 1D harmonischen Oszillator gelten die zwei ersten Eigenfunktionen $\phi_0(x) \propto e^{-\alpha x^2/2}$ *und* $\phi_1(x) \propto x e^{-\alpha x^2/2}$. *Für* $\ell = 1$ *gelten die Kugelflächenfunktionen*

$$Y_{1,1}(\theta,\varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi}$$
$$Y_{1,0}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$
$$Y_{1,-1}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\varphi}$$