Universität
Konstanz

Integrierter Kurs Physik IV
Exp.-Teil – Atomphysik
SoSe 19

Prof. E. Weig, Anh-Tuan Le, Felix Rochau

Übungsblatt 11

Ausgabe: 24.06.2019, Abgabe: 30.06.2019

Aufgabe 30: Spin-Bahn Wechselwirkung & relativistische Korrektur
(schriftlich) **(8 Punkte)**

Zur Berechnung der Niveauverschiebung aufgrund der relativistischen Korrektur sowie der Spin-Bahn-Kopplung werden die Mittelwerte $< 1/r >$, $< 1/r^2 >$ und $< 1/r^3 >$ in Zuständen gebraucht, die durch die Wasserstoffwellenfunktionen beschriebenen werden.

Hinweis: $\langle\vec{r}\rangle \equiv \int d^3r\vec{r}\left|\Psi\left(\vec{r},t\right)\right|^2$

a) Berechnen Sie $< 1/r >$ und $< 1/r^2 >$ für den 2s-Zustand. $R_{2,0}(r) = \frac{2}{(2a)^{3/2}}(1 - \frac{r}{2a})e^{-r/2a}$. Die erste relativistische Korrektur ergibt sich aus

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + \dots .$$

Wir nehmen an, dass wir mit den Lösungen der nicht-relativistischen Schrödingergleichung zwar in sehr guter Näherung die richtigen Wellenfunktionen gefunden haben, also die korrekte Bewegung eines Elektrons. Jedoch haben wir dessen Massenzunahme mit der Geschwindigkeit noch nicht berücksichtigt und deshalb sind die den Zuständen zugeordneten Energien zu korrigieren.
Aus $H = \dfrac{p^2}{2m} + V$ folgt $p^4 = 4m^2[H - V]^2$, wobei $V = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ die Coulombenergie ist
und in einem Eigenzustand $< H >= E_n$ die aus dem Bohrschen Atommodell bekannte Energie, bzw. $H\Psi = E_n\Psi$.

Berechnen Sie $< W_{mv} >=< \dfrac{p^4}{8m^3c^2} >$ für den 2s-Zustand.

b) Berechnen Sie $< 1/r^3 >$ für den 2p-Zustand. $R_{2,1}(r) = \frac{1}{\sqrt{3}(2a)^{3/2}}\frac{r}{a}e^{-r/2a}$. Berechnen Sie die Spin-Bahn-Kopplungs-Korrektur zur Energie

$$< E_{ls} >=< \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{2m^2c^2} \cdot \frac{1}{r^3}\vec{L} \cdot \vec{S} >$$

für die Zustände $^2P_{3/2}$ und $^2P_{1/2}$. Sie müssen zunächst für beide Fälle getrennt den Winkel zwischen $\vec{L}$ und $\vec{S}$ ausrechnen aus der Bedingung, dass die Vektoraddition ein $\vec{J}$ der Länge $3/2\ \hbar$ bzw. $1/2\ \hbar$ ergibt.

Aufgabe 31: Landé-Faktor (1 Häkchen)

In einem nicht zu starken Magnetfeld koppeln Bahndrehimpuls $\vec{L}$ und Spin $\vec{S}$ zum Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$.

a) Zeigen Sie anhand einer Zeichnung, ausgehend von $\vec{\mu}_L = -\frac{e}{2m}\vec{L}$ und $\vec{\mu}_S = -\frac{e}{m}\vec{S}$, dass das magnetische Moment $\vec{\mu}_J = \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_S$ *nicht* parallel zu $\vec{J}$ ist. Argumentieren Sie mit dem Strahlensatz.

b) Betrachten Sie die Projektion von $\vec{\mu}_J$ auf $\vec{J}$, um den Landé-Faktor

$$g_j = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}$$

herzuleiten. l, s und j sind dabei über $|\vec{L}| = \hbar\sqrt{l(l+1)}$, $|\vec{S}| = \hbar\sqrt{s(s+1)}$ und $|\vec{J}| = \hbar\sqrt{j(j+1)}$ definiert, und $\vec{\mu}_J \cdot \frac{\vec{J}}{|\vec{J}|} = -\frac{e}{2m} g_j |\vec{J}|$.

Aufgabe 32: Klassische Betrachtung des Elektronenspins? (1 Häkchen)

Im Folgenden soll versucht werden, den Eigendrehimpuls eines Elektrons klassisch zu behandeln. Betrachten Sie dazu ein Elektron als Kugel mit $r_e < 10^{-16}$ m und $m_e = 9.109 \cdot 10^{-31}$ kg.

a) Wie groß müsste die Rotationsfrequenz sein, um den experimentell beobachteten Drehimpuls zu erklären?

b) Welche Rotationsgeschwindigkeit wäre nötig, um das magnetische Moment eines Elektrons zu erhalten? Nehmen Sie dazu an, dass sich die Ladung auf dem Äquator der Kugeloberfläche befindet. Der sich dadurch ergebenden Kreisstrom erzeugt das magnetisches Moment. Überprüfen Sie die Einheiten ihres Ergebnisses.

c) Wie hoch wäre in diesem Fall die Rotationsgeschwindigkeit am Äquator des Elektrons? Was bedeutet das für die klassische Erklärung des Elektronenspins?