Universität
Konstanz

Integrierter Kurs Physik IV
Exp.-Teil – Atomphysik
SoSe 19

Prof. E. Weig, Anh-Tuan Le, Felix Rochau

Übungsblatt 10

Ausgabe: 17.06.2019, Abgabe: 24.06.2019

Aufgabe 28: Pauli-Spinmatrizen (schriftlich) **(8 Punkte)**

Die beiden möglichen Zustände eines Teilchens mit dem Eigendrehimpuls $s = 1/2$ können geschrieben werden als

$$\left| s = \frac{1}{2}, m_s = \frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle \text{ und } \left| s = \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle$$

Mit der üblichen Wahl der Quantisierung in Richtung der z-Achse, ist die Matrixdarstellung des Spin-Operators in dieser Basis durch $\hat{\mathbf{s}} = \frac{\hbar}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ mit den Pauli-Spinmatrizen

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie
$$\hat{\sigma}_i^2 = \mathbb{1},\ \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y = i\hat{\sigma}_z,\ [\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] = 2i\hat{\sigma}_z,\ \hat{\boldsymbol{\sigma}} \times \hat{\boldsymbol{\sigma}} = 2i\hat{\boldsymbol{\sigma}}$$

b) Berechnen Sie die *Antikommutatoren* ($\{\hat{A}, \hat{B}\} := \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$)
$$\{\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y\},\ \{\hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z\},\ \{\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_z\}$$

c) Die Leiteroperatoren seien gegeben durch $\hat{\sigma}_\pm := \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y)$. Bestimmen Sie die Wirkung von $\hat{\sigma}_\pm$ auf die Zustände $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$

d) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\hat{s}_z$ und $\hat{\mathbf{s}}^2$. Zeigen sie die Gültigkeit der für alle Drehimpulse geltenden Matrixelemente
$$\langle sm_s' | \hat{s}_z | sm_s \rangle = \hbar m_s \delta_{m_s, m_s'}$$
$$\left\langle sm_s' \left| \hat{\mathbf{s}}^2 \right| sm_s \right\rangle = \hbar^2 s(s+1) \delta_{m_s, m_s'}$$
$$\langle sm_s' | \hat{s}_\pm | sm_s \rangle = \hbar\sqrt{(s \mp m_s)(s \pm m_s + 1)}\delta_{m_s \pm 1, m_s'}.$$

e) Zeigen Sie folgende für die Zeitentwicklung von Zuständen wichtige Beziehung

$$e^{i\alpha\hat{\sigma}_i} = \mathbb{1}\cos\alpha + i\hat{\sigma}_i \sin\alpha$$

Aufgabe 29: Den Übergang durch die Zeeman-Aufspaltung identifizieren (je ein Häkchen für a-c, d-f)

Eine Spetrallinie ($\lambda_0 = 766,7012nm$) eines Atoms wird in einem schwachen Magnetfeld von $2,00T$ in sechs Komponenten aufgespaltet.

Linie	Wellenlänge [nm]
A1	766,6097
A2	766,6463
B1	766,6829
B2	766,7195
C1	766,7561
C2	766,7927

Bei einer Beobachtung in einer Ebene senkrecht zum Magnetfeld sind die Linien linear polarisiert, wobei A und C in dieser Ebene schwingen, und B parallel zum B-Feld. Bei Beobachtung in Feldrichtung werden nur die Linien A und C gefunden, wobei diese nun entgegengesetzt zueinander zirkular polarisiert sind.

a) Liegt der normale oder der anomale Zeeman-Effekt vor? Woran erkennen Sie das?

b) Gegeben sei nun, dass LS-Kopplung vorliegt, und es sich um einen Übergang innerhalb der Feinstruktur eines Hauptniveaus handelt. Ferner sei $s = 1/2$. Ihr Ziel ist es nun, detektivisch zu ermitteln, zwischen welchen Orbitalen der Übergang stattfindet. Berechnen Sie zunächst alle vorkommeden $\Delta(gm_j) = g_2 m_{j2} - g_1 m_{j1}$.

c) Sie möchten herausfinden, in wie viele Unterniveaus die beiden Niveaus aufgesplittet sind, da Sie dann j kennen. Was schließen Sie – für eines der Niveaus – aus der Tatsache, dass genau zwei Linien entlang des B-Feldes fehlen?

d) Für das andere Niveau – was schließen Sie aus der Tatsache, dass es insgesamt sechs Linien gibt?

e) Welche zwei Übergänge kommen also noch in Frage? Verwenden Sie für Ihre Antwort die Spektroskopische Schreibweise ${}^{2s+1}X_j$ mit $X = S, P, D, ...$ für $l = 0, 1, 2, ...$

f) Berechnen Sie nun die beteiligten Landé-g-Faktoren, und identifizieren Sie per Vergleich mit Teilaufgabe b) den Übergang.