Integrierter Kurs Physik IV
Exp.-Teil – Atomphysik
SoSe 19

Prof. E. Weig, Anh-Tuan Le, Felix Rochau

Übungsblatt 7

Ausgabe: 27.05.2019, Abgabe: 03.06.2019

Aufgabe 19: Franck-Hertz Versuch **(1 Häkchen)**

Im Franck-Hertz Versuch werden Elektronen mit variabler Spannung beschleunigt und kollidieren dann mit Atomen in einem Hg-Dampf bei einem Druck von ca. 10^{-2} mbar. Die Ionisationsenergie von Hg beträgt 4.9 eV.

a) Welche Wellenlänge hat die Strahlung, die bei der Rekombination von Elektronen und Hg-Ionen frei wird?

b) Nehmen Sie nun an, Sie hätten atomarenWasserstoff anstatt Quecksilber in Ihrer Versuchsapparatur. Bei welcher Beschleunigungsspannung erwarten Sie erstmals Ionisationsereignisse und damit Rekombinationsstrahlung?

c) Es findet nicht nur Ionisation von Atomen statt, sondern es kommt auch zu Anregungen des Elektrons aus dem Grundzustand in höhere Zustände. Sie wollen mit einem Gitterspektralapparat zwei angeregte Zustände von Wasserstoff trennen, für deren Übergangsenergien in den Grundzustand $E_1 = 12.09$ eV bzw. $E_2 = 12.75$ eV gilt. Die Atomspektren des Wasserstoffs werden in sogenannte Serien unterteilt, wobei für deren Übergangsenergien gilt:

$$E_{n,n'} = 13.6 \text{ eV} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right) \tag{1}$$

Welche Werte haben n und n' für diese beiden Übergänge? Welche Auflösung $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ muss ein Gitterspektralapparat haben, damit die Messung möglich ist?

Aufgabe 20: Eigenfunktionen von Drehimpulsoperatoren (schriftlich) **(7 Punkte)**

a) Rechnen Sie sich als Vorbereitung alle Elemente der Matrix

$$\begin{pmatrix} \partial r/\partial x & \partial r/\partial y & \partial r/\partial z \\ \partial\theta/\partial x & \partial\theta/\partial y & \partial\theta/\partial z \\ \partial\varphi/\partial x & \partial\varphi/\partial y & \partial\varphi/\partial z \end{pmatrix} \tag{2}$$

zusammen. (r, θ, φ) bedeuten Kugel-, (x, y, z) kartesische Koordinaten.

b) Drücken Sie jetzt $L_x = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $L_y = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$ und $L_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$ in Kugelkoordinaten aus.

Benutzen Sie $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \varphi}$ etc. Zeigen Sie weiterhin, dass mit den Definitionen $L_+ = L_x + iL_y$ und $L_- = L_x - iL_y$ gilt:

$$L_+ = \hbar e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \quad \text{und} \quad L_- = -\hbar e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial \theta} - i\cot\theta\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \tag{3}$$

$L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \varphi}$ sollte sich schon vorher ergeben haben.

c) Überprüfen Sie durch Einsetzen für L_+ und L_-, dass $\frac{1}{2}(L_+L_- + L_-L_+) + L_z^2$ dem Drehimpulsbetrag $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ entspricht. Benutzen Sie hierbei *nicht* bereits eine Darstellung der Produkte L_+L_- und L_-L_+ durch L^2 und L_z, wie sie sie vielleicht aus der Vorlesung kennen, sondern lediglich die Definitionen aus b). Mit den expliziten Formeln aus b) zeigen Sie nun weiter, dass gilt:

$$\frac{L^2}{\hbar^2} = -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \cot\theta\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \tag{4}$$

$$= -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \tag{5}$$

Aufgabe 21: Elektron im Wasserstoffatom **(1 Häkchen)**

In Aufgabe 17 haben Sie die quantisierten Bahnradien r_n und Geschwindigkeiten v_n des Elektrons im Bohrschen Atommodell berechnet. Betrachten Sie nun ein Wasserstoffatom und zeigen Sie, dass die Umlauffrequenz im Orbit n durch

$$f_n = \frac{e^4 m}{32\pi^3\epsilon_0^2\hbar^3}\frac{1}{n^3}$$

bestimmen lässt. Beweisen Sie, dass im Grenzfall großer n die Frequenz des beim Übergang $n \to n-1$ emittierten Photons mit der Umlauffrequenz des Elektrons im Orbit n übereinstimmt.