Universität Konstanz

Integrierter Kurs Physik IV
Exp.-Teil – Atomphysik
SoSe 19

Prof. E. Weig, Anh-Tuan Le, Felix Rochau

Übungsblatt 3

Ausgabe: 29.04.2019, Abgabe: 06.05.2019

Aufgabe 6: Wirklich Hermitesch? **(1 Häkchen)**

a) Welche Bedingung muss ein Operator erfüllen, damit er hermitesch ist? Schreiben Sie die Bedingung auf für Wellenfunktionen $\psi(x)$ im eindimensionalen Raum.

b) Setzen Sie nun als Operator den Impuls-Operator ein.

c) Wählen Sie eine Seite Ihrer Gleichung und formen Sie sie durch partielle Integration um ($\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$).

d) Der Grenzterm, also das, was $uv|_a^b$ entspricht, muss verschwinden aufgrund einer allgemeinen Eigenschaft von Wellenfunktionen – welcher?

e) Führen Sie den Beweis zuende, dass der Impulsoperator hermitesch ist.

Aufgabe 7: Wirklich hermitesch (II)? **(je 1 Häkchen für a-b, c-d)**

Drehimpuls setzt sich in der Quantenmechanik zusammen wie in der klassischen Mechanik, d.h. $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, nur dass die einzelnen Variablen x, y, z und p_x, p_y, p_z durch die entsprechenden Operatoren $\hat{x}, \hat{p}_x$... ersetzt werden.

a) Ist $\vec{L}$ ein Operator? *(Hinweis: benutzen Sie die formale Definition eines Operators.)*

b) Überprüfen Sie, ob die Komponenten von $\vec{L}$ hermitesch sind. Rechnen Sie dabei nicht explizit mit Hilfe einer Testfunktion und eines Integrals, sondern nutzen Sie folgende Fakten: $[\hat{x}, \hat{p}_x] = [\hat{y}, \hat{p}_y] = [\hat{z}, \hat{p}_z] = i\hbar$, $[\hat{x}, \hat{p}_y] = [\hat{x}, \hat{p}_z] = 0$ etc. $\hat{x}, \hat{p}_x$... sind hermitesch. Ferner $(\hat{S}\hat{T})^\dagger = \hat{T}^\dagger \hat{S}^\dagger$ für beliebige Operatoren $\hat{S}$ und $\hat{T}$.

c) Als Vorbereitung für die nächste Teilaufgabe berechnen Sie folgende Kommutatoren: $[\hat{L}_x, \hat{z}]$, $[\hat{L}_x, \hat{p}_z]$, $[\hat{L}_x, \hat{x}]$ und $[\hat{L}_x, \hat{p}_x]$. Nutzen Sie auch hier bekannte Kommutatoren, anstatt sie explizit auszurechnen.

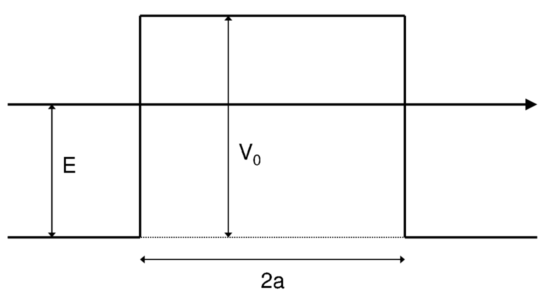
d) Zeigen Sie nun, dass $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z$. Zyklische Permutationen dieser Beziehung sind ebenfalls wahr (brauchen Sie nicht zeigen). Kann der Gesamt-Drehimpuls $\vec{L}$ beliebig genau bestimmt werden?

Aufgabe 6: α-Zerfall und Tunneleffekt (schriftlich abzugeben) **(6 Punkte)**

Die Transmissionswahrscheinlichkeit durch eine symmetrische Rechteckbarriere der Breite $2a$ lautet folgendermaßen:

$$|T|^2 = \frac{1}{1 + (1 + (\varepsilon^2/4))\sinh^2(2\kappa a)}$$

wobei $\varepsilon = \frac{\kappa}{k} - \frac{k}{\kappa}$, $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, $\kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$.



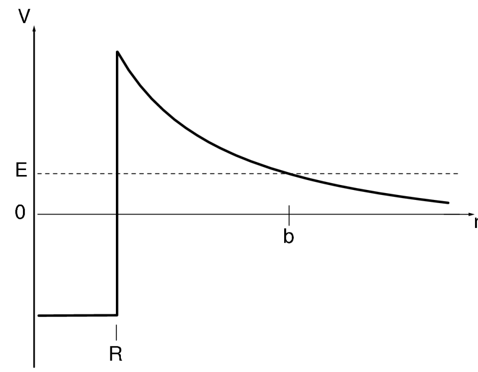
a) Zeigen Sie, dass für eine sehr dicke Barriere, also $\kappa a \gg 1$, sich die Transmissionswahrscheinlichkeit sehr gut als

$$|T|^2 \approx \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} \exp(-4\sqrt{2m(V_0 - E)}\frac{a}{\hbar}) \qquad (*)$$

nähern lässt.

b) Als Beispiel für das Tunneln durch eine Potentialbarriere wollen wir den α-Zerfall betrachten, d.h die Aussendung eines α-Teilchens (He-Kern = 2 Protonen und 2 Neutronen) aus einem Atomkern.

Für das α-Teilchen sieht das durch die restlichen Kernbestandteile verursachte Potential grob folgendermaßen aus: Innerhalb des Kernradius R wird es durch Kernkräfte gebunden (tiefer Potentialtopf). Entfernt sich das α-Teilchen über R hinaus von der Kernmitte, verhalten sich α-Teilchen und Restkern wie zwei entsprechende positive Punktladungen. Für $r > R$ setzen wir das Coulombpotential an. Wie lautet $V(r)$ für $r > R$?



Hat das α-Teilchen im Kern bereits eine Energie $E > 0$, kann es durch die Barriere tunneln und den Kern verlassen. Die Barriere ist nicht rechteckig, und das Potentialniveau außerhalb ist auch nicht auf beiden Seiten dasselbe. Bei vorgegebenem E lässt sich zunächst der Ort (Radius) b bestimmen, wo der Austritt aus der Barriere erfolgt, und somit die gesehene Barrierendicke.

Um (*) anwenden zu können, vereinfachen Sie das Potential wie unten skizziert. Nehmen Sie $V = 0$ an für $r < R$ und $r > b$. Mitteln Sie alle Werte des $1/r$-Potentials zwischen R und b und bestimmen so ein V_0 als Höhe einer Rechteckbarriere, durch die Sie die "schräge" Barriere sinnvoll ersetzen können. Polonium werde durch α-Zerfall in Blei umgewandelt (entsprechende Isotope, so dass mit Weggang des α-Teilchens auch die Neutronenzahl erhalten bleibt). Nehmen Sie weiter $R = 1 \cdot 10^{-14}$m und $E = 10$MeV als gegebene Zahlenwerte an. Berechnen Sie b, V_0 und $|T|^2$.