Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach
http://tinyurl.com/2019ik4

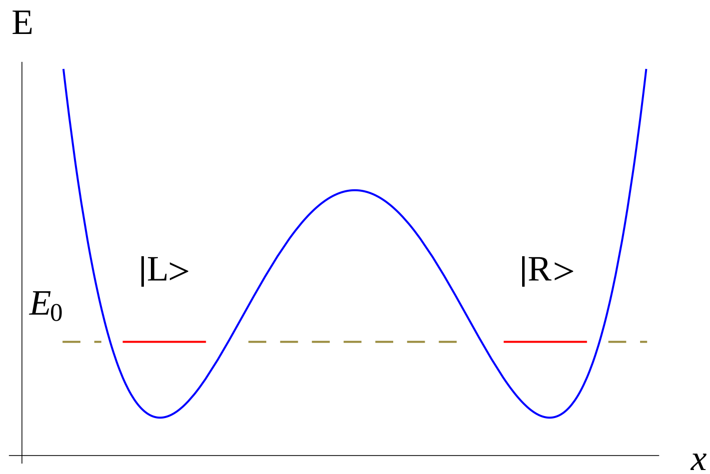
Universität Konstanz

Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)
Sommersemester 2019 - Übungsblatt 13
Ausgabe: 10.7., Abgabe: 17.7., Übungen: 19.7.

Aufgabe 36: Zwei-Niveausystem **(schriftlich - 6 Punkte)**

a) (1 Punkt) Betrachten Sie zunächst ein Doppelmulden-Potential, bei dem die Barriere in der Mitte so hoch ist, dass kein Teilchen diese durchdringen kann. In jedem der beiden Mulden soll es nur einen Zustand der Energie E_0 geben ($|L\rangle$ and $|R\rangle$).

Welcher Hamiltonoperator beschreibt das System?



b) (1 Punkt) Für eine kleinere Barriere ist Tunneln möglich, d. h.

$$H|L\rangle = E_0|L\rangle + t|R\rangle ,$$

$$H|R\rangle = E_0|R\rangle + t|L\rangle .$$

Stellen Sie die Matrixdarstellung des Hamiltonoperators H in der Orthonormalbasis $\{|L\rangle, |R\rangle\}$ auf.

c) (2 Punkte) Berechnen Sie die Eigenwerte und normierten Eigenzustände von H?

d) (1 Punkt) Nehmen Sie an, ein Teilchen sei im Zustand $|L\rangle$ oder $|R\rangle$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man das Teilchen in einem der beiden Eigenzustände messen?

e) (1 Punkt) Nehmen Sie an, ein Teilchen sei in einem der Eigenzustände von H. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man das Teilchen in den Zuständen $|L\rangle$ und $|R\rangle$ messen?

Aufgabe 37: Zwei-Niveausystem (Spin-Polarisation) (mündlich)

a) Zeigen Sie, dass für einen beliebigen normierten Zustand $|\psi\rangle$ im zwei-dimensionalen Hilbertraum $\mathbb{C}^2$ (mit Standard-Skalarprodukt) gilt

$$\langle\psi|\boldsymbol{\sigma}|\psi\rangle = \boldsymbol{n}$$

mit $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$ einem normierten Richtungsvektor ($|\boldsymbol{n}| = 1$). $\boldsymbol{\sigma}$ ist der Vektor gebildet mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es gibt also zu jedem $|\psi\rangle$ eine Richtung $\boldsymbol{n}$, so dass der Erwartungswert des Vektors $\boldsymbol{\sigma}$ in Richtung $\boldsymbol{n}$ zeigt.

b) Bei einer Messung an diesem Zustand wird die Wahrscheinlichkeit p bestimmt, den Eigenwert $+1$ von σ_z zu finden. Zeigen Sie, dass $p = \frac{1}{2}(1 + n_z)$ gilt. Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, den Eigenwert $+1$ von σ_x zu messen?

Aufgabe 38: Störungstheorie für ein Zwei-Niveau-System (mündlich)

Betrachten Sie ein Zwei-Niveau-System mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

und einer Störung

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} 0 & r \\ r & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 2\Delta$ und $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$.

a) Berechnen Sie die Korrektur erster Ordnung der Eigenfunktionen und die Korrektur zweiter Ordnung des Energiespektrums für den Fall $\Delta \gg r$.

b) Bestimmen Sie die Korrektur des Eigenwerts in erster Ordnung und die richtigen Funktionen nullter Ordnung für den Fall $\Delta = 0$. Beachten Sie, dass das Energieniveau in diesem Fall zweifach entartet ist!

c) Skizzieren Sie das Energiespektrum als Funktion von Δ (Δ kann auch negativ sein.). Verwenden Sie die Ergebnisse aus (a) und (b) und diskutieren Sie die Δ-Abhängigkeit des Energiespektrums.