Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach
http://tinyurl.com/2019ik4

Universität Konstanz

Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)
Sommersemester 2019 - Übungsblatt 11
Ausgabe: 26.6., Abgabe: 3.7., Übungen: 5.7.

Aufgabe 30: Der Impulsoperator (mündlich)

Als Beispiel für unbeschränkte Operatoren betrachten wir den Impulsoperator in der Ortsdarstellung (in einer Dimension) $\hat{p} = -\mathrm{i}\hbar\partial_x$. Dieser ist definiert auf dem Raum der differenzierbaren Funktionen $\psi(x)$ für $x \in [a, b]$. Seine Eigenwertgleichung lautet

$$\hat{p}\,\psi(x) = -\mathrm{i}\hbar\partial_x\psi(x) = p\,\psi(x).$$

a) Zeigen Sie mit dem Skalarprodukt $\langle\phi|\,\psi\rangle = \int_a^b \phi^*(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x$ und $|\hat{p}\psi\rangle = \hat{p}|\psi\rangle$, dass

   1. $\hat{p}$ i. A. nicht symmetrisch ($\langle\phi|\hat{p}\psi\rangle = \langle\hat{p}\phi|\psi\rangle$) ist
   2. die Eigenwerte nicht reell sein müssen

   falls keine Randbedingungen an die $\psi(x)$ gestellt werden.

b) Zeigen Sie, dass im Grenzfall $a \to -\infty$, $b \to \infty$ und der Randbedingung $\lim_{x\to\infty}|\psi(x)| = \lim_{x\to-\infty}|\psi(x)| < \infty$ der Operator $\hat{p}$ symmetrisch wird und damit nur reelle Eigenwerte besitzt.

   Hinweis: Betrachten Sie $\langle\psi|\hat{p}\psi\rangle$. Bekanntermaßen sind die Lösungen nur durch eine δ-Funktion normierbar.

c) Zeigen Sie, dass für $\psi(a) = \psi(b) = 0$ ($|a|, |b| < \infty$) der Operator $\hat{p}$ symmetrisch ist, aber keine Eigenfunktionen mit der Randbedingung besitzt. Dieser Operator ist also nicht selbstadjungiert, da der Definitionsbereich unnötig eingeschränkt wird.

d) Zeigen Sie, dass für periodische Randbedingungen ($\alpha\psi(a) = \psi(b)$ mit $|\alpha| = 1$) der Operator $\hat{p}$ symmetrisch ist und seine Eigenfunktionen eine Orthonormalbasis bilden. Dieser Operator ist damit selbstadjungiert.

Aufgabe 31: Der Harmonische Oszillator I (schriftlich - 8 Punkte)

Mit der für den harmonischen Oszillator aus der Vorlesung bekannten orthonormierten Basis der Eigenzustände $|n\rangle$, mit $n = 0, 1, 2, ...$, des Hamiltonoperators $H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$ zu den Eigenwerten $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, sollen die Matrixdarstellungen wichtiger Operatoren bestimmt werden.

a) (2 Punkte) Berechnen Sie die Matrizen $\langle n'|\hat{x}|n\rangle$ und $\langle n'|\hat{p}|n\rangle$ mit den Orts- und Impuls-Operatoren $\hat{x}$ und $\hat{p}$.

b) (3 Punkte) Berechnen Sie $\langle n'|\hat{x}^2|n\rangle$ und $\langle n'|\hat{p}^2|n\rangle$ und zeigen Sie, dass die Matrixdarstellung von $H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$ diagonal ist.

c) (3 Punkte) Lösen Sie mit Teilaufgabe b) folgenden Widerspruch:

   i) Zeigen Sie für 2 beliebige endlich dimensionale Matrizen A und B, dass $\mathrm{Spur}([A, B]) = 0$ gilt, wobei $\mathrm{Spur}(A) = \sum_i A_{ii}$.

   ii) Aus der Spurbildung angewendet auf den Orts-Impuls-Kommutator $[\hat{x}, \hat{p}] = \mathrm{i}\hbar$ in Matrixdarstellung müsste nach Punkt i) in naiver Betrachtung $\hbar = 0$ folgen. Berechnen Sie $\hat{x}\hat{p}$ und $\hat{p}\hat{x}$ mit den unendlich-dimensionalen Matrizen aus a) um zu erklären, weswegen die Folgerung $\hbar = 0$ nicht gilt.

Aufgabe 32: Der Harmonische Oszillator II **(mündlich)**

Betrachten Sie die sogenannten *kohärenten Zustände*

$$|\alpha\rangle := |\psi_\alpha\rangle = C\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = C\mathrm{e}^{\alpha a^\dagger}|0\rangle,$$

die mit einer komplexen Konstante $\alpha = |\alpha|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}$ gebildet werden können. Kohärente Zustände beschreiben das Analogon zu einem klassischen Teilchen im harmonischen Oszillator und haben vielseitige Anwendungen in der Laserphysik und Quantenoptik.

a) Zeigen Sie, dass $|\alpha\rangle$ Eigenfunktion zum Absteigeoperator a ist. Zeigen Sie, dass $a^\dagger$ keine Eigenzustände besitzt.

b) Welches $C > 0$ normiert $|\alpha\rangle$ auf 1?

   Mit diesem C kann $|\alpha\rangle$ geschrieben werden als $|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$. Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung ergibt $p_n = |c_n|^2$? Drücken Sie diese durch die mittlere Teilchenzahl $\langle\hat{n}\rangle = \langle\alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle$ aus. Berechnen Sie auch die Varianz $(\Delta n)^2$ der Teilchenzahl.

c) Wie lautet der zeitabhängige Zustand $|\alpha(t)\rangle$, wenn $|\alpha(t = 0)\rangle = |\alpha\rangle$?
   Hinweis: Argumentieren Sie mit der zeitabhängigen Schrödingergleichung und bringen Sie $|\alpha(t)\rangle$ auf die Form $|\alpha(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2}|\psi_{\alpha(t)}\rangle$.

d) Berechnen Sie den zeitabhängigen Erwartungswert für den Ort

$$\langle x\rangle(t) = \langle\alpha(t)|\hat{x}|\alpha(t)\rangle.$$

   Hinweis: Bringen Sie das Ergebnis auf die Form $\langle x\rangle(t) = 2\lambda|\alpha|\cos(\omega t - \delta)$.

e) Berechnen Sie die Unschärfe $(\Delta x)^2(t) = \langle\alpha(t)|(\hat{x} - \langle x\rangle(t))^2|\alpha(t)\rangle$ und (das analog definierte) $(\Delta p)^2(t)$ z. B. durch Ausnutzung von $\langle p\rangle = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle x\rangle$ (Ehrenfest-Theorem).

   Zeigen Sie damit, dass $|\alpha\rangle$ ein sogenanntes Minimalpaket ist, welches zeitlich nicht auseinander läuft, d. h.

$$\Delta x(t)\Delta p(t) = \frac{\hbar}{2}.$$