Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach
http://tinyurl.com/2019ik4

Universität Konstanz

Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)
Sommersemester 2019 - Übungsblatt 6
Ausgabe: 22.5., Abgabe: 29.5., Übungen: 31.5.

Aufgabe 14: Drehimpulsalgebra (schriftlich - 5 Punkte)

a) (3 Punkte) Berechnen Sie folgende Kommutatorrelationen für den Drehimpulsoperator

$$\hat{\boldsymbol{L}} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)^T = \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}}$$

bzw. $\hat{L}_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \hat{x}_j \hat{p}_k$ mit den bekannten Kommutatorrelationen der Orts- und Impulskomponenten:

$$[\hat{L}_i, \hat{x}_j],\ [\hat{L}_i, \hat{p}_j],\ [\hat{L}_i, \hat{L}_j],$$

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_i],\ [\hat{L}_i, \hat{r}^2],\ [\hat{L}_i, \hat{p}^2].$$

b) (2 Punkte) Zeigen Sie außerdem mit den Leiteroperatoren $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$, dass:

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm\hbar\hat{L}_\pm,$$

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_\pm] = 0,$$

$$[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar\hat{L}_z,$$

$$\hat{L}_+\hat{L}_- = \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 + \hbar\hat{L}_z.$$

Aufgabe 15: Eigenzustände von $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ und $\hat{L}_x$ (schriftlich - 6 Punkte)

Als "Drehimpulsstandardbasis" bezeichnet man die orthonormierte Basis $\{|l,m\rangle\}$ der simultanen Eigenzustände von $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ und $\hat{L}_z$. In dieser Aufgabe sollen Sie für den Drehimpuls $l = 1$ die Eigenzustände $|1,\mu\rangle$ von $\hat{L}_x$, welche $\hat{L}_x|1,\mu\rangle = \hbar\mu|1,\mu\rangle$ mit $\mu = 0, \pm 1$ erfüllen, durch die Eigenzustände $|1,m\rangle$ von $\hat{L}_z$ ausdrücken.

a) (1 Punkt) Berechnen Sie mit Hilfe der Leiteroperatoren $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm \mathrm{i}\hat{L}_y$ die Elemente der Matrix $\langle 1,m'|\hat{L}_x|1,m\rangle$.
   Hinweis: $\hat{L}_\pm|l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}|l,m\pm 1\rangle$.

b) (2 Punkte) Entwickeln Sie $|1,\mu\rangle$ in der Basis $\{|1,m\rangle\}$ und geben Sie mit der Matrix aus (a) die Entwicklungskoeffizienten an.

c) (2 Punkte) Berechnen Sie für die Eigenwerte von $\hat{L}_x$ mit $\mu = 0, \pm 1$ die dazugehörigen normierten Eigenzustände $|1,\mu\rangle$.

d) (1 Punkt) Einer der möglichen Eigenwerte ist $\mu = 0$. Geben Sie den Erwartungswert von $\hat{L}_z$ sowie die möglichen individuellen Messwerte von $\hat{L}_z$ in diesem Zustand an.

Aufgabe 16: Unschärferelation für $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ **(mündlich)**

Verifizieren Sie die allgemeine Unschärferelation

$$\Delta O_1 \Delta O_2 \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{O}_1, \hat{O}_2] \rangle|$$

explizit für $\hat{O}_1 = \hat{L}_x$, $\hat{O}_2 = \hat{L}_y$ und für die allgemeine Eigenfunktion von $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ mit Quantenzahlen l und m. Drücken Sie dazu $\hat{L}_{x/y}$ durch Leiteroperatoren aus und benutzen Sie die aus der Vorlesung bekannte Wirkung auf Drehimpulseigenzustände. Für welche m gilt bei gegebenem l Gleichheit in der Unschärferelation?

Aufgabe 17: Kugelflächenfunktionen **(mündlich)**

a) Zeigen Sie die folgende Eigenschaft der Kugelflächenfunktionen

$$Y_{l,-m}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m Y^*_{l,m}(\vartheta, \varphi).$$

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Vollständigkeit

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{l,m}(\vartheta', \varphi') Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos\vartheta - \cos\vartheta')$$

und der Orthonormalität der Kugelflächenfunktionen

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\vartheta Y^*_{l',m'}(\vartheta, \varphi) Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'},$$

dass sich jede Funktion f nach Kugelflächenfunktionen entwickeln lässt, d.h.

$$f(\boldsymbol{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} R_{l,m}(r) Y_{l,m}(\vartheta, \varphi).$$

c) Zeigen Sie explizit, dass die folgenden Kugelflächenfunktionen als Eigenfunktionen von L^2 und L_z alle zueinander orthonormal sind:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta, Y_{1\pm1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{\pm i\varphi} \sin\vartheta.$$

d) Verwenden Sie zum Lösen der folgenden Aufgaben das Computer-Algebra-System MATHEMATICA™ z. B. im PC-Pool der Physik.

   i) Zeigen Sie die Normierung der in a) angegebenen Kugelflächenfunktionen, indem Sie die entsprechenden Integrale berechnen lassen.

   ii) Stellen sie das Betragsquadrat der Kugelflächenfunktionen für $l = 0, 1, 2$ und alle möglichen m graphisch dar.

   Hinweis: Verwenden Sie die Funktion `SphericalPlot3D`. In MATHEMATICA sind die Kugelflächenfunktionen verfügbar als `SphericalHarmonicY`[l, m, θ, ϕ].

   iii) Stellen Sie auch das Betragsquadrat der folgenden Kombinationen von Kugelflächenfunktionen dar und vergleichen Sie mit ii)

$$Y_{11} + Y_{1-1}, Y_{11} - Y_{1-1},$$
$$Y_{21} + Y_{2-1}, Y_{21} - Y_{2-1}, Y_{22} + Y_{2-2}, Y_{22} - Y_{2-2}.$$