Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach
http://tinyurl.com/2019ik4

Universität Konstanz

Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)
Sommersemester 2019 - Übungsblatt 3
Ausgabe: 29.4., Abgabe: 8.5., Übungen: 10.5.

Aufgabe 6: Operator-Gymnastik (schriftlich - 8 Punkte)

a) (2 Punkte) Zeigen Sie folgende Kommutatorrelationen ($[A, B] = AB - BA$) für beliebige Operatoren A, B und C bzw. beliebige Funktionen $f(x)$ und $g(p)$:

   i) $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$,

   ii) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ (Jacobi-Identität),

   iii) $[p, f] = -\mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$,

   iv) $[x, g] = \mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}g(p)}{\mathrm{d}p}$.

b) (2 Punkte) Nehmen Sie an, A und B seien unabhängig von λ. Beweisen Sie mit Hilfe einer Taylorentwicklung um $\lambda = 0$ das sogenannte *Baker-Hausdorff-Theorem*:

$$e^{\lambda B} A e^{-\lambda B} = A + \lambda[B, A] + \frac{\lambda^2}{2}[B, [B, A]] + \frac{\lambda^3}{3!}[B, [B, [B, A]]] + \dots .$$

c) (2 Punkte) Sei $A = x$ und $B = -\mathrm{i}p/\hbar$. Erläutern Sie, welche Rolle der Operator

$$T(\lambda) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda p/\hbar}$$

spielt und zeigen Sie, dass $T(\lambda)$ unitär ist, d. h. $T^\dagger = T^{-1}$, wobei T^{-1} das Inverse des Operators T bezeichnet. Welche Wirkung hat dieser Operator auf eine Wellenfunktion $\psi(x)$?

d) (2 Punkte) Zeigen Sie für zwei hermitesche Operatoren A und B im Hilbertraum L^2, dass auch

   i) $A + B$, A^n,

   ii) λA mit $\lambda \in \mathbb{R}$,

   iii) $[A, B]_+ = AB + BA$,

   iv) $\mathrm{i}[A, B]$

   hermitesch sind.

Aufgabe 7: Zeitentwicklung eines Zustandes (mündlich)

Zum Zeitpunkt $t = 0$ lautet die Wellenfunktion eines Teilchens

$$\psi(\boldsymbol{r}, 0) = \alpha\phi_1(\boldsymbol{r}) + \beta\phi_2(\boldsymbol{r}),$$

wobei $\phi_{1,2}$ zwei normierte und orthogonale Lösungen der stationären Schrödingergleichung

$$\hat{H}\phi_{1,2} = E_{1,2}\phi_{1,2}$$

mit den Energieeigenwerten $E_{1,2}$ sind. α und β sind zwei komplexe Konstanten.

a) Bestimmen Sie eine Beziehung zwischen α und β aus der Normierungsbedingung für $\psi(\boldsymbol{r}, 0)$. Wie lassen sich $|\alpha|^2$ und $|\beta|^2$ interpretieren?

b) Berechnen Sie mit Hilfe der zeitabhängigen Schrödingergleichung die Zeitentwicklung der Wellenfunktion $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ für die Zeit $t > 0$.

c) Berechnen Sie den Energiemittelwert für das Teilchen im Zustand $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ und diskutieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 8: Wahrscheinlichkeitsdichte und Wahrscheinlichkeitsstromdichte (mündlich)

Es sei $P_a(t)$ die Wahrscheinlichkeit ein Teilchen der Masse m, das sich in einer Dimension bewegt, im Intervall $-a < x < a$ zu finden. Die Wellenfunktion sei $\psi(x, t)$.

a) Zeigen Sie, dass

$$\frac{\mathrm{d}P_a(t)}{\mathrm{d}t} = j(-a, t) - j(a, t),$$

wobei

$$j(x, t) = \frac{-\mathrm{i}\hbar}{2m}\left(\psi^*(x, t)\frac{d\psi(x, t)}{dx} - \psi(x, t)\frac{d\psi^*(x, t)}{dx}\right)$$

die quantenmechanische Wahrscheinlichkeitsstromdichte ist.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j(x, t)$, wenn die Wellenfunktion des Teilchens lautet (A ist eine Normierungskonstante):

i) $\psi(x, t) = A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}kx}$,

ii) $\psi(x, t) = A\mathrm{e}^{-a\left(mx^2/\hbar + \mathrm{i}t\right)}$,

iii) $\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{a\sqrt{\pi}(1+\mathrm{i}t/\tau)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2(1+\mathrm{i}t/\tau)} - \mathrm{i}\omega_0 t\right)$ (siehe Aufgabe 1),

Diskutieren Sie die Zeitabhängigkeit $\frac{\mathrm{d}P_a(t)}{\mathrm{d}t}$ in den drei Fällen.