Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach
http://tinyurl.com/2019ik4

Universität Konstanz

Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)
Sommersemester 2019 - Übungsblatt 2
Ausgabe: 24.4., Abgabe: 2.5., Übungen: 3.5.

Aufgabe 3: Delta-Distribution (schriftlich - 10 Punkte)

Die Diracsche δ-Distribution $\delta(t)$, auch "δ-Funktion" genannt, ist definiert durch folgende Eigenschaft:

$$f(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t.$$

Dabei ist $f(t)$ eine hinreichend glatte Funktion.

a) (1 Punkt) Argumentieren Sie, dass die δ-Distribution als Grenzwert einer unendlich schmalen Gauss-Verteilung aufgefasst werden kann, d.h.

$$\delta(x) \equiv \lim_{\sigma\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

b) (1 Punkt) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{\delta}(\omega)$ von $\delta(t-t_0)$.

c) (1 Punkt) Zeigen Sie durch Rücktransformation von $\hat{\delta}(\omega)$, dass gilt:

$$\delta(t-t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-t_0)}\,\mathrm{d}\omega$$

d) (1 Punkt) Berechnen Sie die Fouriertransformierten von $f(t) = \sin(\omega_0 t)$ und $g(t) = \cos(\omega_0 t)$.

e) (je 1 Punkt) Leiten Sie die folgenden Eigenschaften der δ-Distribution her:

i)

$$\int_a^b \delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & \text{falls } a < t_0 < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ii)

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t')\,\mathrm{d}t' = \theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\theta(t)$ ist die *Heavyside*-Stufenfunktion.

iii)

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$

iv)

$$\delta(at) = \frac{1}{|\,a\,|}\delta(t)$$

v) Für $f(t)$ stetig differenzierbar und $f'(t_i) \neq 0$ ($\forall t_i$ mit $f(t_i) = 0$):

$$\delta(f(t)) = \sum_{t_i, f(t_i)=0} \frac{\delta(t - t_i)}{\mid f'(t_i) \mid}$$

vi)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t - t_0)\,\mathrm{d}t = -f'(t_0)$$

Aufgabe 4: Erwartungswert **(mündlich)**

Zeigen Sie, dass der Erwartungswert

$$\langle \boldsymbol{p} \rangle = \int \mathrm{d}^3 r\, \psi^*(\boldsymbol{r}, t) \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \nabla_r \psi(\boldsymbol{r}, t)$$

reell ist. Die Wellenfunktion $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ soll quadratintegrierbar sein.
Hinweis: Berechnen Sie $\langle \boldsymbol{p} \rangle - \langle \boldsymbol{p} \rangle^*$.

Aufgabe 5: Lösungen der freien Schrödingergleichung **(mündlich)**

a) Wie lautet die Lösung der Schrödingergleichung für freie Teilchen ($V = 0$) im Eindimensionalen?

b) Warum ist die Lösung aus a) physikalisch nicht sinnvoll für den gesamten Definitionsbereich? Wie lässt sich das Problem lösen? Diskutieren Sie dazu die Kontinuumsnormierung auf eine δ-Funktion und die Box-Normierung.

c) Betrachten Sie das allgemeine (eindimensionale) Wellenpaket

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx - \omega(k)t)}\,\mathrm{d}k.$$

Was ist die Bedeutung der Funktion $g(k)$? Stellen Sie eine Verbindung von $g(k)$ zur Kontinuum-Normierung her.

d) Zeigen Sie für das allgemeine Wellenpaket, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle p \rangle = 0$. Was lässt sich über die zeitlich gemittelten Erwartungswerte $\langle p \rangle_t$ und $\langle x \rangle_t$ aussagen?