Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach
http://tinyurl.com/2019ik4

Universität Konstanz

**Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)**
**Sommersemester 2019 - Übungsblatt 1**
Ausgabe: 17.4., Abgabe: 24.4., Übungen: 26.4.

## Aufgabe 1: Das Gauß'sche Wellenpaket (schriftlich - 12 Punkte)

Gegeben sei eine Gaußverteilung der Wellenzahlen $k$ in einer Dimension:

$$a(k) = C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_0}\mathrm{e}^{-\frac{(k-k_0)^2}{4\sigma^2}} \qquad (\sigma > 0).$$

a) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Normierungskonstante $C \in \mathbb{R}$, so dass

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |a(k)|^2 \, \mathrm{d}k = 1.$$

b) (2 Punkte) Berechnen Sie das zugehörige Wellenpaket im Ortsraum durch Fourier-Rücktransformation

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} a(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} \, \mathrm{d}k$$

und der Dispersionsrelation $\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$.

*Hinweis*: Es ergibt sich

$$\psi(x,t) = \frac{C}{\sqrt{4\pi b(t)}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 c(t)}\mathrm{e}^{-\frac{(x-r(t))^2}{4b(t)}}$$

mit $b(t) = \frac{1}{4\sigma^2} + \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}t, r(t) = x_0 + \frac{\hbar k_0}{m}t$ und $c(t) = x - x_0 - \frac{\hbar k_0}{2m}t$.

c) (2 Punkte) Berechnen Sie $|\psi(x,t)|^2$ und zeigen Sie, dass das Maximum des Wellenpaketes am Ort $x_0 + v_g t$ liegt. $v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\big|_{k_0}$ ist hierbei die Gruppengeschwindigkeit. Betrachten Sie auch die Breite des Wellenpaketes $|\psi(x,t)|^2$ und beschreiben Sie das *Zerfließen des Wellenpaketes*.

d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 \, \mathrm{d}x$ unabhängig von der Zeit ist. Was bedeutet das?

e) (2 Punkte) Berechnen Sie den *Erwartungswert*

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,t)^* x \psi(x,t) \, \mathrm{d}x$$

des Ortes $x$ im Zustand $\psi(x,t)$ sowie $\langle x^2 \rangle$.

f) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass für die Varianz (Unschärfe) einer beliebigen Funktion $A(x)$ gilt:

$$(\Delta A)^2 := \left\langle (A - \langle A \rangle)^2 \right\rangle = \left\langle A^2 \right\rangle - \langle A \rangle^2 .$$

g) (2 Punkte) Berechnen Sie damit die Ortsunschärfe $\Delta x$ und die Impulsunschärfe $\Delta p$ wobei für den Impuls gilt $p = -\mathrm{i}\hbar\partial_x$.

h) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die *Heisenbergsche Unschärferelation* $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ erfüllt ist. Wann gilt das Gleichheitszeichen?

## Aufgabe 2: Diffusion und Gauß'sches Wellenpaket (mündlich)

Die (eindimensionale) Diffusionsgleichung (Wärmeleitungsgleichung)

$$\partial_t \phi(x,t) = D\partial_x^2 \phi(x,t)$$

beschreibt die Ausbreitung einer beliebigen Funktion $\phi(x,t)$ (z. B. Temperatur) mit der Zeit aufgrund von Zufallsprozessen wie z. B. Streuereignissen.

a) Lösen Sie die Diffusionsgleichung für eine (normierte) Gaußverteilung mit einer zeitabhängigen Breite

$$\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s(t)} \mathrm{e}^{-\frac{(x-x_0)^2}{2s(t)^2}} \quad (s(t) > 0)$$

und finden Sie $s(t)$.

*Hinweis*: Für die zeitabhängiger Breite ergibt sich der Ausdruck

$$s(t) = \frac{D}{s'(t)}.$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung mit einem geeigneten Ansatz.

b) Diskutieren und vergleichen Sie das Ergebnis mit der zeitabhängigen Breite der Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ des Gauß'schen Wellenpaketes aus Aufgabe 1.