

**Übungen zu Scientific Computing mit Python
Sommersemester 2025**

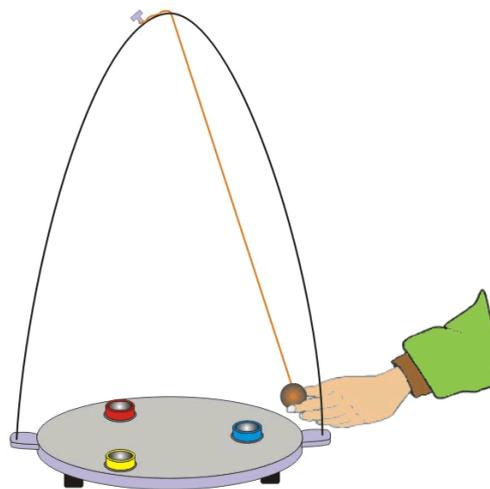
Übungsblatt 5

Ausgabe 13.6., Übungen KW 26+27, Abgabe bis 4.7.

Projekt: Ein Chaotisches System

1. Aufgabe: Das Magnetpendel

Wir betrachten ein sog. Magnetpendel, d. h. eine Stahlkugel an einem Faden (fester Länge) über drei Magneten. Aufgrund der nichtlinearen Bewegung, kann es unter bestimmten Bedingungen zu chaotischem Verhalten. Wir wollen solch ein Magnetpendel numerisch untersuchen.



- (a) Stelle die Bewegungsgleichung für die Stahlkugel auf. Zur Vereinfachung soll die Bewegung der Stahlkugel nur in der x - y Ebene stattfinden und die Kraft in der Form

$$\mathbf{F}_m = \sum_{i=1}^3 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$$

angenähert werden.

Zusätzlich soll eine geschwindigkeitsabhängige Reibung $\mathbf{F}_r = -\gamma \dot{\mathbf{r}}$ und die Federkraft $\mathbf{F}_f = -k\mathbf{r}$ wirken.

- (b) Überlege dir eine sinnvolle Position der drei Magnete auf einem Feld $(x=[-1,1], y=[-1,1])$, damit deren Schwerpunkt im Ursprung liegt.
- (c) Schreibe die Bewegungsgleichung in ein geeignetes numerisches Lösungsverfahren um (z. B. Verlet-Verfahren).

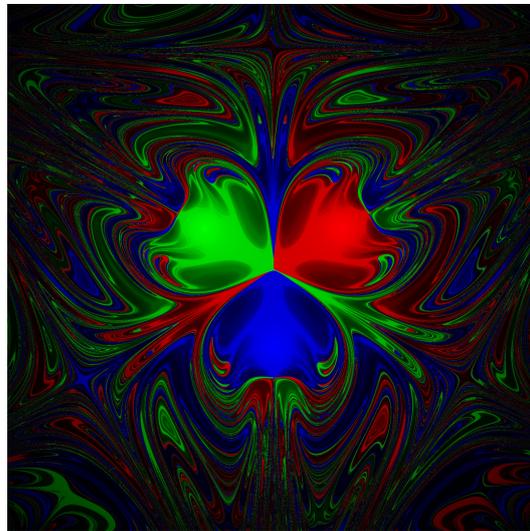
- (d) Implementiere die Lösung der Bewegungsgleichung in einem Python-Programm und teste verschiedene Szenarien (ohne Magnete, ohne Reibung, ohne Federkraft, etc.).
- (e) Stelle die Bewegung der Stahlkugel für drei verschiedene, aber nahegelegene Startpunkte (x_0, y_0) grafisch dar (x - y -Diagramm), um das chaotische Verhalten zu zeigen.

Folgende dimensionslose Werte sind sinnvoll:

Masse $m = 1$, Dämpfungskonstante $\gamma = 0,2$, Federkonstante $k = 0,5$, Höhe des Pendels $z = 0,25$.

Hinweis: Die Simulation kann abgebrochen werden, falls sich die Gesamtenergie kaum noch ändert (Pendel ruht).

- (f) Offensichtlich landet das Pendel am Ende immer über einem der drei Magneten. Ändere das Programm so, dass es für ein Raster von Startpunkten im Intervall $x = [-1, 1]$ und $y = [-1, 1]$ den Endmagneten (1, 2 oder 3) ausgibt. Stelle das Ergebnis mit drei Farben grafisch dar (analog zum "Apfelmännchen"). Es sollte das chaotische Verhalten deutlich werden, wie hier am Beispiel zu sehen:



- (g) (Optional): Erweitere das Programm auch für zwei oder vier Magneten und stelle das Ergebnis ebenfalls grafisch dar.