



**Übungen zur Computerphysik II**  
**Wintersemester 2023/24**

**Übungsblatt 6**

Ausgabe 23.1., Übungen KW 5+6, Abgabe bis 9.2.

Zufallszahlen und Anwendungen

**1. Aufgabe: Zufallszahlentests**

Betrachte die folgenden (Pseudo-)Zufallszahlengeneratoren

(A) Linearer Kongruenzgenerator

$$x_{n+1} = (ax_n + b) \pmod{m}$$

mit  $m = 2^{31}$ ,  $a = 65539$ ,  $b = 0$  (RANDU).

(B) Linearer Kongruenzgenerator mit  $m = 2^{31}$ ,  $a = 1103515245$ ,  $b = 12345$  (GLIBC).

(C) Nachkommastellen von  $\pi$ .

*Hinweis:*

```
from sympy.mpmath import mp
```

```
N=1000 # number of digits
```

```
mp.dps = N
```

```
s = str(mp.pi)
```

```
for i in range(2,N):
```

```
    print s[i],
```

(D) Der Standard-PRNG von Python (random()).

Der Startwert (SEED) kann frei gewählt werden.

a) Bestimme für alle PRNGs  $N = 10^4$  Zufallszahlen in drei Spalten und plote diese dreidimensional ("Parking-Lot"- bzw. Spektraltest). Bei welchen PRNGs erkennt man durch Drehung des Plots Hyperebenenverhalten?

b) Bestimme für alle PRNGs  $N = 100, 10000, 1000000$  Zufallszahlen und berechne

$$\langle z_i \rangle, \langle z_i z_{i+1} \rangle.$$

c) Überprüfe für alle Fälle von b), ob gilt

$$\langle z_i z_{i+1} \rangle = \langle z_i \rangle \langle z_{i+1} \rangle.$$

## 2. Aufgabe: Monte-Carlo-Integration

- a) Wir wollen die Fläche eines Kreises mit Hilfe der Stein-Wurf-Methode bestimmen. Effektiv berechnen wir also das Integral

$$4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$$

mit der Monte-Carlo-Integration.

Schreibe dazu ein Python-Programm und bestimme  $N$ -mal zwei unabhängige Zufallszahlen  $a$  und  $b$  im Bereich  $[0, 1]$  und berechne das Verhältnis  $N_+/N$ , wobei  $N_+$  die Versuche mit  $a^2 + b^2 \leq 1$  sind.

Vergleiche das Ergebnis für verschiedene Werte von  $N$ . Wie gut konvergiert die Methode für  $N \rightarrow \infty$  gegen den theoretischen Wert?

### b) Einheitskugel

Die MC-Integration ist insbesondere bei hochdimensionalen Integralen konkurrenzlos.

Erweitere das Programm aus a), um das Volumen der  $d$ -dimensionalen Einheitskugel  $V_d = \int d^d x$  zu berechnen. Erzeuge dazu  $N$ -mal  $d$  unabhängige Zufallszahlen  $x_i$  im Bereich  $[0, 1]$  und berechne wieder das Verhältnis  $N_+/N$ , wobei  $N_+$  hier die Versuche mit  $\sum_{i=1}^d x_i^2 \leq 1$  sind.

Stelle das berechnete Volumen für  $N = 10^6$  abhängig von der Dimension  $d = 1, \dots, 20$  dar und vergleichen Sie mit dem analytischen Ergebnis

$$V_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(1 + d/2)}. \quad (1)$$