



**Übungen zur Computerphysik II**  
**Wintersemester 2023/24**

**Übungsblatt 4**

Ausgabe 11.12., Übungen KW50+51+2, Abgabe bis 15.1.

Datenanpassung, Reihenentwicklung und diskrete Fouriertransformation

**1. Aufgabe: (Nicht)lineare Anpassung**

Betrachte die drei Datenpunkte  $(-1,0)$ ,  $(0,2)$ ,  $(1,1)$ .

- Schreibe ein Python-Programm, das eine lineare Regression des Datensatzes durchführt und plote das Ergebnis.
- Finde mithilfe der Polynomregression das interpolierende Polynom (2. Ordnung) und plote es.
- Verwende die Polynomapproximation mit den Legendre-Polynomen um das interpolierende Polynom linear zu nähern. Vergleiche das Ergebnis mit dem aus a).
- Mit Hilfe von `gnuplot` lassen sich Daten "fitten". Finde heraus wie das geht und teste es mit einer linearen Modellfunktion. Vergleiche das Ergebnis mit dem aus a).
- Verwende Python (`scipy.optimize.curve_fit`) um die Daten mit einer linearen Funktion zu fitten. Welche Fitparameter liefert Python? Vergleiche das Ergebnis mit dem aus a).

**2. Aufgabe: Fourier-Legendre-Reihe**

Mit Hilfe der orthonormalen Legendre-Polynome  $P_l(x)$  lässt sich jede Funktion auf dem Intervall  $[-1, 1]$  analog zur Fourierreihe in eine *Fourier-Legendre-Reihe* entwickeln:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l P_l(x).$$

Aufgrund der Normierung der Legendre-Polynome

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'}$$

ergeben sich die Entwicklungskoeffizienten zu

$$a_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_l(x) dx.$$

- a) Plotte die ersten sechs Legendre-Polynome (`scipy.special.legendre(n)`).
- b) Schreibe eine Funktion zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten  $a_l$ . Teste sie anhand der Funktionen  $f_0(x) = P_0(x)$ ,  $f_1(x) = P_1(x)$ ,  $f_2(x) = P_2(x)$ .
- c) Berechne die Entwicklungskoeffizienten  $a_l$  für die Funktion  $f(x) = \sin(\pi x)$
- d) Plotte die Funktion  $\sin(\pi x)$  und die Näherungen bis zur  $n$ -ten Ordnung. Wie gut konvergiert die Reihe?
- e) Berechne analog die Fourier-Legendre Reihe für die Dreiecksfunktion  $g(x) = 1 - |x|$  und die Rechteckfunktion  $h(x) = \begin{cases} 1 & (|x| < 0.5) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ . Wie gut konvergiert die Fourier-Legendre-Reihe hier?

### 3. Aufgabe: Diskrete Fouriertransformation

Mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation wollen wir die Fouriertransformierte einer gedämpften Schwingung untersuchen.

- a) Berechne und Plotte die diskrete Fouriertransformation einer konstanten Funktion und einer "δ-Funktion" für unterschiedliche Anzahl von Samplepunkten (`numpy.fft.fft()`). Interpretiere die Ergebnisse.
- b) Berechne die diskrete Fouriertransformation einer abfallenden Exponentialfunktion  $f(t) = e^{-\alpha t}$  zuerst für  $\alpha = 1$  und  $t = [0, 50]$  und Plotte Real- und Imaginärteil. Der Realteil beschreibt die Absorption und der Imaginärteil die Phasenverschiebung bei Wechselwirkung von elektromagnetischer Strahlung mit einem Atom. Sind die Ergebnisse plausibel? Plotte dazu zum Vergleich die (theoretisch erwartete) Lorentzfunktion.
- c) Welchen Einfluß hat die Zerfallskonstante  $\alpha$  auf die Fouriertransformierte in b)? Was kann man also über die Lebensdauer eines Zustandes anhand der Linienbreite des Spektrums aussagen?
- d) Berechne die diskrete Fouriertransformation einer gedämpften Schwingung  $f(t) = e^{-t} \cos(10t)$  für  $t = [0, 50]$ . Plotte wieder Real- und Imaginärteil. Was ist der Unterschied zur abfallenden Exponentialfunktion aus b)?

**Gesegnete Weihnachten und einen guten Start ins Jahr 2024!**