



**Übungen zur Computerphysik II**  
**Wintersemester 2023/24**

**Übungsblatt 3**

Ausgabe 23.11., Übungen KW 48+49, Abgabe bis 11.12.

Numerische Integration und kontinuierliche Verteilungen  
*Bitte jeweils eine Aufgabe ((1 oder 2) und (3 oder 4)) aussuchen*

**1. Aufgabe: Beugungsmuster einer Lochblende**

Das radiale Beugungsmuster einer runden Lochblende ist gegeben (siehe IK3) durch die Formel  $I(r) = (J_1(kr)/(kr))^2$  mit  $k = 2\pi/\lambda$  und den *Bessel-Funktionen*

$$J_m(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(m\theta - r \sin \theta) d\theta.$$

- Schreibe ein Programm zur Berechnung von  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$  und  $J_2(x)$  für  $x = 0..20$  und  $N = 100$  mit der Trapezmethode.
- Plote die Ergebnisse zum Vergleich mit den bekannten Besselfunktionen (scipy.special.j0(), etc.).
- Plote das Beugungsmuster einer Lochblende als Dichteplot für verschiedene Wellenlängen

*Hinweis:*

[https://scipy-lectures.github.io/intro/matplotlib/auto\\_examples/plot\\_contour\\_ex.html](https://scipy-lectures.github.io/intro/matplotlib/auto_examples/plot_contour_ex.html)

**2. Aufgabe: Kantenbeugung**

Eine ebene Welle der Wellenlänge  $\lambda$  wird an einer scharfen Kante gebeugt.

Die Intensität auf einem Schirm im Abstand  $z$  ist dann gegeben durch

$I = I_0/8((2C(u) + 1)^2 + (2S(u) + 1)^2)$  mit  $u = x\sqrt{2/(\lambda z)}$  und den *Fresnel-Integralen*:

$$C(u) = \int_0^u \cos(\pi t^2/2) dt, \quad S(u) = \int_0^u \sin(\pi t^2/2) dt$$

- Schreibe jeweils eine Funktion um die Fresnel-Integrale zu berechnen. Vergleiche mit [http://en.wikipedia.org/wiki/Fresnel\\_integral](http://en.wikipedia.org/wiki/Fresnel_integral)
- \* Plote den parametrischen Plot ( $x = C(t), y = S(t)$ ) um die sog. Euler-Spirale zu erhalten.
- Schreibe damit ein Programm um die Intensität  $I(x)/I_0$  abhängig von  $\lambda$  und  $z$  zu bestimmen.
- Plote die Ergebnisse für verschiedene Wellenlängen und Abstände des Schirms.

### 3. Aufgabe: Maxwell-Boltzmann-Verteilung

Die Geschwindigkeitsverteilung von Atomen der Masse  $m$  eines idealen Gases der Temperatur  $T$  (siehe IK) ist gegeben durch

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi v^2 e^{-mv^2/kT}.$$

Wir wollen die Verteilung am Beispiel von Helium-Atomen ( $m = 6.65 \cdot 10^{-27}$  kg) bei der Temperatur 300 K untersuchen. Die Boltzmann-Konstante ist  $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$  J/K.

- Zeichne die Verteilung und finde dessen Maximum  $v_{\max}$ .
- Berechne den Mittelwert  $\langle v \rangle$  und das mittlere Geschwindigkeitsquadrat  $v_{\text{RMS}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$  durch Numerische Integration (z.B. `scipy.integrate.quad()`).
- Zeichne  $\langle v \rangle$ ,  $v_{\text{RMS}}$  und die Standardabweichung  $\sigma = \sqrt{\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2}$  in die Verteilung ein.
- \* Bestimme den Median  $v_m$  der Verteilung, definiert durch  $\int_0^{v_m} f(v) dv = 0.5$ . Wo liegt er im Vergleich zu  $v_{\max}$  und  $\langle v \rangle$ ?

### 4. Aufgabe: Unschärfe im Harmonischen Oszillator

Die Wellenfunktion eines Teilchens im Harmonischen Oszillator ist gegeben durch

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-x^2/2} H_n(x)$$

mit den Hermite-Polynomen  $H_n(x)$  definiert durch  $H_0(x) = 1$ ,  $H_1(x) = 2x$  und  $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$ .

- Schreibe mit SymPy ein Programm, das die Hermite Polynome für  $n = 0, \dots, 30$  ausgibt und für  $n = 0, \dots, 3$  plottet.
- Plote die Wellenfunktion für  $n = 0, 1, 2$  und  $n=30$  im Bereich  $x = [-10, 10]$ .
- Berechne die Unschärfe  $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$  der Wellenfunktion mit

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\Psi_n(x)|^2 dx$$

durch numerische Integration für  $n = 0$  und  $n=5$ .