UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Matthias Fuchs
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de
PD Dr. Rudolf Haussmann
E-mail: rudolf.haussmann@gmx.de

Übungen zur Vorlesung: Stochastische Prozesse
mit Anwendung in Statistischer Physik und auf Finanzmärkte,
Wintersemester 2011/12

Übungsblatt 8, Ausgabe 13.12.2011, Abgabe und Besprechung am 20.12.2011

1. **Weißes Rauschen, Schroteffekt** *(5 Punkte)*
Betrachten Sie eine Zufallsprozess mit den folgenden Eigenschaften:

 · Innerhalb eines Zeitintervalls Δt gibt es höchstens ein Ereignis
 · Die Wahrscheinlichkeit, ein Ereignis im Intervall zu finden, ist proportional zur Länge des Intervalls
 · Unabhängigkeit der Ereignisse von der Vorgeschichte

Die Folge von Ereignissen wird durch die Zufallsvariable $Y(t) = \sum_i \delta(t - t_i)$ beschrieben. Die Zufallsvariable, die die Anzahl der Ereignisse n angibt ist gegeben durch $n = \int_0^t \mathrm{d}t'\, Y(t')$

(a) Wie heißt dieser Prozess? Welche Verteilung ist $P(n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$?
Geben Sie $\langle n \rangle$ und $\langle n^2 \rangle$ an.

(b) Betrachten Sie nun die Korrelationsfunktion $\langle Y(t'')Y(t') \rangle$ und zeigen Sie zunächst dass

$$\langle n^2 \rangle = \int_0^t \mathrm{d}t' \int_0^t \mathrm{d}t'' \langle Y(t')Y(t'') \rangle$$

gilt. Benutzen Sie jetzt die Zeit-Translationsinvarianz der Korrelationsfunktionen um

$$\langle n^2 \rangle = 2 \int_0^t \mathrm{d}\tau\, (t - \tau) \langle Y(\tau)Y(0) \rangle \tag{1}$$

zu zeigen.

(c) Folgern Sie nun durch Differnzieren

$$2\lambda^2 t + \lambda = 2 \int_0^t \mathrm{d}\tau \langle Y(\tau)Y(0) \rangle \tag{2}$$

und begründen Sie die Form

$$\langle Y(t)Y(0) \rangle = \lambda^2 + \lambda \delta(t) \tag{3}$$

Hinweis: Betrachten Sie den Limes $t \to 0$.
Damit haben Sie die Korrelation der Fluktuationen f bestimmt zu

$$\langle f(t)f(0)\rangle := \langle (Y(t)-\overline{y})(Y(0)-\overline{y})\rangle = \lambda\delta(t) \tag{4}$$

(d) Bestimmen Sie das Spektrum dieser Korrelation und interpretieren Sie es.

(e) Zeigen Sie dass aus der Eigenschaft $\langle f(t)f(t')\rangle = \lambda\delta(t-t')$ und $\langle f(t)\rangle = 0$ auf das folgende charakteristische Funktional führt

$$\left\langle \exp\left[i\int \mathrm{d}t\, K(t)f(t)\right]\right\rangle = \exp\left[-\frac{\lambda}{2}\int \mathrm{d}t\, K^2(t)\right] \tag{5}$$

Hinweis: Entwickeln Sie die Exponentialfunktion.

2. **Molekularmotoren im getriebenen Feld** (*5 Punkte*)
Ein sogenannter Brownscher Motor besteht aus einem klassischen Teilchen, das sich in einem Potential, das zeitlich und örtlich periodisch ist befindet. Das Teilchen ist an ein Wärmebad gekoppelt und fluktuiert damit in Position und Geschwindigkeit. Der 'Motor' soll sich in eine bestimmte Richtung bewegen, was durch die spezielle Beschaffenheit des Potentials erreicht wird.
Die Fokker-Planck Gleichung, die die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Position x des Teilchens zum Zeitpunkt t wiedergibt lautet

$$\gamma\partial_t P(x,t) = -\left[\partial_x g(x,t) - D\partial_x^2\right] P(x,t) \tag{6}$$

mit der Reibung γ, dem Diffusionskoeffizienten D und der Kraft $g(x,t)$. Wegen der Periodizität gilt $g(x+L,t) = g(x,t+T) = g(x,t)$.

(a) Geben Sie den Ausdruck für den Zeit- und Ortsgemittelten Strom an. Wir sind weiter an dem nicht-diffusiven Anteil interessiert

$$J = \gamma^{-1}\langle g(x,t)P(x,t)\rangle_{T,L}$$

mit $\langle ...\rangle_{T,L} = 1/T 1/L \int_0^T \int_0^L ...\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$.
Warum ist dieser Teil der physikalisch interessante?

(b) Um zu sehen wann J verschwindet, nehmen wir an P sei translationsinvariant (in x und t). Dann muss sich bei einer Transformation von t und x das Vorzeichen von J ändern. Vorzeichenwechsel des Stromes können durch $x \to -x$ oder $t \to -t$ erreicht werden. Folgende Transformationen sind also möglich

$$x \to -x + x',\ t \to t + t' \Rightarrow g \to -g \tag{7}$$
$$x \to x + x',\ t \to -t + t' \Rightarrow g \to -g \tag{8}$$

Zeigen Sie dass die periodisch anregende Kraft

$$g(x,t) = -V_0 \sin x + (E_1 \sin(\omega t) + E_2 \sin(2\omega t + \theta)) \tag{9}$$

mit $E_1, E_2 \neq 0$ und $\theta \neq \pi$ beide Symmetrien bricht.
Was heißt das also 'anschaulich' für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens mit der Zeit t?

(c) Die Bewegungsgleichung für P ist nicht allgemein lösbar. Allerdings ist eine diskrete Fourierentwicklung möglich. Wählen Sie den Ansatz

$$P(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \sum_{n,k=-N,-K}^{N,K} P_{nk}\, e^{i(nx+k\omega t)}$$

und zeigen Sie dass man folgendes Gleichungssystem erhält

$$(ik\gamma\omega + Dn^2)P_{lk} + in \sum_{l,q} g_{lq} P_{n-l,k-q} = 0 \tag{10}$$

mit der Fourierkoeffiezinten g_{nk} von $g(x,t) \sum_{n,k} g_{nk} e^{i(nx+k\omega t)}$.

(d) Zeigen Sie dass man

$$J = \frac{1}{\gamma\sqrt{2\pi T}} \sum_{n,k} g_{nk} P_{-n,-k} \tag{11}$$

erhält.