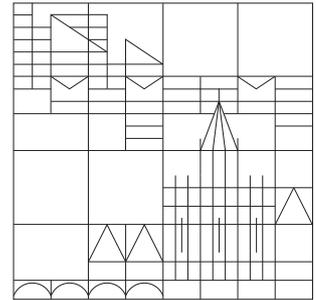


UNIVERSITÄT KONSTANZ
 Fachbereich Physik
 Prof. Dr. Matthias Fuchs
 Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
 E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de
 PD Dr. Rudolf Haussmann
 E-mail: rudolf.haussmann@gmx.de



Übungen zur Vorlesung: Stochastische Prozesse
 mit Anwendung in Statistischer Physik und auf Finanzmärkte,
 Wintersemester 2011/12

Übungsblatt 3, Ausgabe 10.11.2011, Abgabe und Besprechung am 15.11.2012

1. **Ehrenfest'sches Urnenmodell, Korrelationsfunktionen** (4 Punkte)

Wir betrachten im Ehrenfest'schen Urnenmodell mit N (wobei N gerade s.a. Vorlesung) Kugeln folgende Korrelationsfunktion

$$K(s) = \sum_{m,n=0}^N \left(n - \frac{N}{2}\right) \cdot \left(m - \frac{N}{2}\right) \cdot P_2(n, i + s; m, i) \quad (1)$$

wobei $P_2(n, i + s; m, i)$ die gemeinsame Wahrscheinlichkeit ist, dass n Kugeln zum Zeitpunkt $i + s$ in der linken Urne sind und m Kugeln zum Zeitpunkt i in der linken Urne waren.

- (a) Überlegen Sie sich zunächst und begründen sie, dass nahe am Gleichgewicht und für große i

$$P_2(n, i + s; m, i) = P_s(n|m)P^{eq}(m) \quad (2)$$

gilt, wobei $P_s(n|m)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit bezeichne, von n nach m in s Schritten zu kommen. $P_s(n|m)$ ergibt sich aus der Übergangswahrscheinlichkeit eines einzelnen Schrittes über $P_1(n|m) = q(n, m)$

- (b) Berechnen Sie nun folgendes Hilfsresultat

$$\sum_{m=0}^N q(n', m) \cdot (m - M) \cdot P^{eq}(m) = \left(1 - \frac{2}{N}\right) \left[n' - \frac{M-1}{1 - \frac{2}{N}}\right] P^{eq}(n'). \quad (3)$$

- (c) Folgern Sie weiter

$$\begin{aligned} & \sum_{n'_1, \dots, n'_{s-1}, m} q(n, n'_{s-1}) \cdot \dots \cdot q(n'_2, n'_1) \cdot q(n'_1, m) (m - M) P^{eq}(m) \\ &= \left[\left(1 - \frac{2}{N}\right)^s \cdot n - C(s) \right] P^{eq}(n) \end{aligned} \quad (4)$$

wobei $C(s)$ nicht von n abhängt.

- (d) Benutzen Sie nun das Ergebnis aus c) um $K(s)$ zu berechnen. Was folgt für sehr große Systeme?

2. Ehrenfest'sches Urnenmodell, Wiederkehrzeit (4 Punkte)

Wir betrachten wieder das Ehrenfest'schen Urnenmodell mit N Kugeln, wobei wir jetzt an der Wiederkehrzeit eines Zustandes interessiert sind.

- (a) Wir führen die Wahrscheinlichkeit ein, dass in der linken Urne zunächst m Kugeln liegen und dann nach s Schritten *zum ersten Mal* n Kugeln liegen: $P'_s(n|m)$. Begründen Sie den Zusammenhang

$$P_s(n|m) = P'_s(n|m) + \sum_{k=1}^{s-1} P'_k(n|m)P_{s-k}(n|n) \quad (5)$$

- (b) Führen Sie jetzt die generierenden Funktionen in Gleichung (5)

$$h(n|m; z) = \sum_{s=1}^{\infty} P_s(n|m)z^s \quad \text{und} \quad g(n|m; z) = \sum_{s=1}^{\infty} P'_s(n|m)z^s \quad (6)$$

ein und zeigen Sie den Zusammenhang

$$g(n|n; z) = \frac{h(n|n; z)}{1 + h(n|n; z)} \quad (7)$$

Zeigen Sie weiter, dass $\lim_{z \rightarrow 1} \partial_z g(n|n; z) = \sum_{s=1}^{\infty} P'_s(n|m)s$. Wir nennen $\theta_n = \sum_{s=1}^{\infty} P'_s(n|m)s$ die mittlere Wiederkehrzeit für n .

- (c) Benutzen Sie nun, dass sich $N + h(n|n; z)$ darstellen lässt als

$$1 + h(n|n; z) = \frac{(-1)^n}{2^N} \sum_{j=-N/2}^{N/2} \frac{1}{1 - \frac{j}{(N/2)^z}} C_{N/2+j}^{(-n-N/2)} C_n^{(j)}. \quad (8)$$

Zeigen Sie dass diese Funktion für $z \rightarrow 1$ divergiert (einen Pol erster Ordnung hat).

- (d) Benutzen Sie c) um die Darstellung

$$1 + h(n|n; z) = p(z) + \frac{(-1)^n}{2^N} C_N^{(-n-N/2)} C_n^{(N/2)} \frac{1}{1-z} \quad (9)$$

zu begründen und berechnen Sie mit dem Resultat in b) die Wiederkehrzeit.

Hinweis: Es ist $\frac{(-1)^n}{2^N} C_N^{(-n-N/2)} C_n^{(N/2)} = \frac{1}{2^N} \frac{N!}{n!(N-n)!}$