UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Matthias Fuchs
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de
PD Dr. Rudolf Haussmann
E-mail: rudolf.haussmann@gmx.de

Übungen zur Vorlesung: Stochastische Prozesse
mit Anwendung in Statistischer Physik und auf Finanzmärkte,
Wintersemester 2011/12

Übungsblatt 3, Ausgabe 10.11.2011, Abgabe und Besprechung am 15.11.2012

1. **Ehrenfestsches Urnenmodell, Korrelationsfunktionen** *(4 Punkte)*
Wir betrachten im Ehrenfestschen Urnenmodell mit N (wobei N gerade s.a. Vorlesung) Kugeln folgende Korrelationsfunktion

$$K(s) = \sum_{m,n=0}^{N} \left(n - \frac{N}{2}\right) \cdot \left(m - \frac{N}{2}\right) \cdot P_2(n, i+s; m, i) \tag{1}$$

wobei $P_2(n, i+s; m, i)$ die gemeinsame Wahrscheinlichkeit ist, dass n Kugeln zum Zeitpunkt $i+s$ in der linken Urne sind und m Kugeln zum Zeitpunkt i in der linken Urne waren.

(a) Überlegen Sie sich zunächst und begründen sie, dass nahe am Gleichgewicht und für große i

$$P_2(n, i+s; m, i) = P_s(n|m) P^{eq}(m) \tag{2}$$

gilt, wobei $P_s(n|m)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit bezeichne, von n nach m in s Schritten zu kommen. $P_s(n|m)$ ergibt sich aus der Überganswahrscheinlichkeit eines einzelnen Schrittes über $P_1(n|m) = q(n,m)$

(b) Berechnen Sie nun folgendes Hilfsresultat

$$\sum_{m=0}^{N} q(n', m) \cdot (m - M) \cdot P^{eq}(m) = \left(1 - \frac{2}{N}\right) \left[n' - \frac{M-1}{1-\frac{2}{N}}\right] P^{eq}(n'). \tag{3}$$

(c) Folgern Sie weiter

$$\begin{aligned} &\sum_{n'_1,\ldots,n'_{s-1},m} q(n, n'_{s-1}) \cdot \ldots \cdot q(n'_2, n'_1) \cdot q(n'_1, m)(m-M) P^{eq}(m) \\ &= \left[\left(1 - \frac{2}{N}\right)^s \cdot n - C(s)\right] P^{eq}(n) \end{aligned} \tag{4}$$

wobei $C(s)$ nicht von n abhängt.

(d) Benutzen Sie nun das Ergebnis aus c) um $K(s)$ zu berechnen. Was folgt für sehr große Systeme?

2. **Ehrenfestsches Urnenmodell, Wiederkehrzeit** *(4 Punkte)*
Wir betrachten wieder das Ehrenfestschen Urnenmodell mit N Kugeln, wobei wir jetzt an der Wiederkehrzeit eines Zustandes interessiert sind.

(a) Wir führen die Wahrscheinlichkeit ein, dass in der linken Urne zunächst m Kugeln liegen und dann nach s Schritten *zum ersten Mal* n Kugeln liegen: $P'_s(n|m)$. Begründen Sie den Zusammenhang

$$P_s(n|m) = P'_s(n|m) + \sum_{k=1}^{s-1} P'_k(n|m) P_{s-k}(n|n) \tag{5}$$

(b) Führen Sie jetzt die generierenden Funktionen in Gleichung (5)

$$h(n|m;z) = \sum_{s=1}^{\infty} P_s(n|m) z^s \quad \text{und} \quad g(n|m;z) = \sum_{s=1}^{\infty} P'_s(n|m) z^s \tag{6}$$

ein und zeigen Sie den Zusammenhang

$$g(n|n;z) = \frac{h(n|n;z)}{1 + h(n|n;z)} \tag{7}$$

Zeigen Sie weiter, dass $\lim_{z \to 1} \partial_z g(n|n;z) = \sum_{s=1}^{\infty} P'_s(n|m)s$. Wir nennen $\theta_n = \sum_{s=1}^{\infty} P'_s(n|m)s$ die mittlere Wiederkehrzeit für n.

(c) Benutzen Sie nun, dass sich $N + h(n|n;z)$ darstellen lässt als

$$1 + h(n|n;z) = \frac{(-1)^n}{2^N} \sum_{j=-N/2}^{N/2} \frac{1}{1 - \frac{j}{(N/2)^z}} C_{N/2+j}^{(-n-N/2)} C_n^{(j)}. \tag{8}$$

Zeigen Sie dass diese Funktion für $z \to 1$ divergiert (einen Pol erster Ordnung hat).

(d) Benutzen Sie c) um die Darstellung

$$1 + h(n|n;z) = p(z) + \frac{(-1)^n}{2^N} C_N^{(-n-N/2)} C_n^{(N/2)} \frac{1}{1-z} \tag{9}$$

zu begründen und berechnen Sie mit dem Resultat in b) die Wiederkehrzeit.
Hinweis: Es ist $\frac{(-1)^n}{2^N} C_N^{(-n-N/2)} C_n^{(N/2)} = \frac{1}{2^N} \frac{N!}{n!(N-n)!}$