UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Matthias Fuchs
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de
PD Dr. Rudolf Haussmann
E-mail: rudolf.haussmann@gmx.de

Übungen zur Vorlesung: Stochastische Prozesse
mit Anwendung in Statistischer Physik und auf Finanzmärkte,
Wintersemester 2011/12

Übungsblatt 13, Ausgabe 31.01.2012, Abgabe und Besprechung am 07.2.2012

1. **Portfolio von zwei Aktien** *(5 Punkte)*
Betrachtet wird ein Portfolio bestehend aus zwei Aktien mit relativen Anteilen n_1, n_2, Renditen $r_1 < r_2$, Volatilitäten $\sigma_1 < \sigma_2$ und Korrelation $k_{12} = k$ im Intervall $-1 \leq k \leq +1$.

(1)

(a) Geben Sie die Korrelationsmatrix k_{ij} und die Kovarianzmatrix s_{ij} an.

(b) Bestimmen Sie die Rendite R und die Volatilität σ in Abhängigkeit der relativen Anteile der Aktien n_1 und n_2. Welche Normierungsbedingung erfüllen die relativen Anteile?

(c) Finden Sie die optimalen Portfolios mit optimalen relativen Anteilen n_1 und n_2. Zeigen Sie, dass es nicht erforderlich ist, die Volatilität zu minimieren, weil die Nebenbedingungen, d.h. die Gleichung für die Rendite und die Normierungsbedingung bereits eine eindeutige Lösung für n_1 und n_2 liefern. Bestimmen Sie die Volatilität $\sigma = \sigma(R)$ als Funktion von R.

(d) Besorgen Sie sich die Kennzahlen zweier Aktien Ihrer Wahl aus dem Internet. Eine mögliche Quelle ist `http://www.boerse.de`. Suchen Sie dort z.B. nach BASF. Unter News+Analysen –> Technische Kennzahlen finden Sie die Volatilität, unter Fundamental das KGV. Die Volatilität σ_i können Sie direkt übernehmen, die Rendite schätzen Sie ab über $r_i = 1/\text{KGV}$. Die Korrelation k_{12} zwischen Aktien ist nicht verfügbar. Versuchen Sie diese per Augenmaß durch Betrachten der Kursverläufe (Charts) der beiden Aktien abzuschätzen.

(e) Untersuchen Sie $\sigma = \sigma(R)$ für die drei Spezialfälle $k = +1$, 0 und -1. Fertigen Sie ein Diagramm an mit den Kennzahlen von (d).

(f) Zeichnen Sie in das Diagramm von (e) eine vierte Kurve für die unter (d) abgeschätzte Korrelation $k_{12} = k$ ein. Bestimmen Sie das Minimum von $\sigma = \sigma(R)$. Berechnen Sie die Rendite R^* und die Volatilität σ^* für dieses optimale Portfolio explizit.

(g) Betrachten Sie nun das erweiterte Portfolio bestehend aus dem Aktienportfolio und zusätzlich einer risikolosen Geldanlage mit dem Zinssatz R_0. Bestimmen Sie die Volatilität σ' des Gesamtportfolios als Funktion der Rendite R' des Gesamtportfolios. Zeigen Sie, dass diese Funktion eine Gerade ist. Zeigen Sie weiterhin, dass für ein optimales Gesamtportfolio diese Gerade die Kurve des Aktienportfolios von (f) in einem Punkt (R_1, σ_1) berührt.

(h) Besorgen Sie sich einen sinnvollen Wert für R_0 aus dem Internet, indem Sie die Zinsstrukturkurve oder die Zinssätze für Bundesanleihen mittlerer Laufzeit betrachten (mit Google suchen). Berechnen Sie explizit die Werte R_1 und σ_1 für den Berührungspunkt von (g).

2. **Theorie von Black & Scholes für Derivate** *(5 Punkte)*
Nach der Theorie von Black & Scholes wird der Preis für Derivate $f = f(K,t)$ einer Aktie mit Kurswerten K bestimmt durch die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} + R_0 K \frac{\partial f}{\partial K} + \frac{1}{2}\sigma^2 K^2 \frac{\partial^2 f}{\partial K^2} = R_0 f \tag{2}$$

mit der Randbedingung $f(K,T) = f_0(K)$, wobei $f_0(K)$ der Wert des Derivats am Tage der Ausübung $t = T$ ist. Die Gleichung bestimmt den zeitlichen Verlauf des Preises $f = f(K,t)$ zu früheren Zeiten $t < T$. Betrachtet seien hier drei Arten von Derivaten ($f = C,\ P,\ F$):

$$\text{Call-Option:}\quad C(K,t) = K\,N(d_1) - B\,e^{R_0(t-T)}\,N(d_2)\ , \tag{3}$$
$$\text{Put-Option:}\quad P(K,t) = B\,e^{R_0(t-T)}\,N(-d_2) - K\,N(-d_1)\ , \tag{4}$$
$$\text{Future:}\quad F(K,t) = K - B\,e^{R_0(t-T)}\ , \tag{5}$$

wobei

$$d_1 = \frac{\ln(K/B) + (R_0 + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \qquad \text{und} \qquad d_2 = \frac{\ln(K/B) + (R_0 - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\ . \tag{6}$$

Weiterhin sei $N(x) = \frac{1}{2}[1 + \mathrm{erf}(x/\sqrt{2})]$, so dass $N'(x) = dN/dx$ die Gauß-Verteilung mit Standardabweichung eins ist. B ist der Basiswert der Aktie, auf den die Optionen bezogen werden.

(a) Prüfen Sie zunächst die Randbedingung am Tag der Ausübung $f(K,T) = f_0(K)$ für alle drei Derivate $f = C,\ P,\ F$ nach. Zeigen Sie, dass es sich bei C, P oder F tatsächlich um eine Call-Option, eine Put-Option oder einen Future handelt.

(b) Zeigen Sie durch Einsetzen, dass $C(K,t)$, $P(K,t)$, $F(K,t)$, definiert in (3)-(5), Lösungen der Gleichung von Black & Scholes (2) sind.

(c) Berechnen Sie $N(x) + N(-x)$ und prüfen Sie nach, dass $F = C - P$ gilt. Ein Future kann also als lineare Kombination einer Call-Option und einer Put-Option betrachtet werden.

(d) Der risikolose Zinssatz sei $R_0 = 5\,\%$ und die Volatilität sei $\sigma = 20\,\%$, bezogen jeweils auf den Zeitraum von $\Delta t = 1$ Jahr. Der Basiswert der Aktie sei $B = 100$ Euro. Berechnen explizit Sie die Derivate $f(K,t)$ als Funktionen von K für die fünf Zeiten t mit $T - t = 1,\ 3/4,\ 1/2,\ 1/4,\ 0$ Jahre, und zwar für alle drei Fälle $f = C,\ P,\ F$. Fertigen Sie drei Diagramme an und diskutieren Sie die Ergebnisse.

(e) Berechnen Sie weiterhin explizit die Derivate $f(K,t)$ als Funktionen von t am Basiswert $K = B$ für alle drei Fälle $f = C,\ P,\ F$. Fertigen Sie wiederum ein Diagramm an und diskutieren Sie die Ergebnisse.

(f) Ein *Sicherheits-Future* $f = SF$ wird definiert durch die Preiskurve am Tag der Ausführung

$$SF(K,T) = SF_0(K) = \begin{cases} -\Delta B & \text{für } K \leq B - \Delta B \\ K - B & \text{für } B - \Delta B < K < B + \Delta B \\ +\Delta B & \text{für } K \geq B + \Delta B \end{cases} \tag{7}$$

mit $B = 100$ Euro und $\Delta B = 20$ Euro. Zeigen Sie, dass sich dieses Derivat als Linearkombination eines Futures, einer Call-Option und einer Put-Option mit geeigneten Basiswerten B_1 und B_2 darstellen lässt. Berechnen Sie explizit $SF(K,t)$ als Funktion von K und fertigen Sie ein ähnliches Diagramm an wie in (d).