UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Matthias Fuchs
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de
PD Dr. Rudolf Haussmann
E-mail: rudolf.haussmann@gmx.de

Übungen zur Vorlesung: Stochastische Prozesse
mit Anwendung in Statistischer Physik und auf Finanzmärkte,
Wintersemester 2011/12

Übungsblatt 12, Ausgabe 24.01.2012, Abgabe und Besprechung am 31.1.2012

1. **Stochastisches Modell für eine Aktie** (*5 Punkte)*
Ein stochastisches Modell für die Kursentwicklung einer Aktie ist gegeben durch die Langevin-Gleichung

$$\frac{dx(t)}{dt} = v + D\, w(t) \tag{1}$$

für die stochastische Variable $x(t)$, die mit dem Kurs der Aktie $K(t)$ zusammenhängt über die Beziehung $x(t) = \ln K(t)$. Die Gleichung (1) ist definiert im Stratonovich-Formalismus mit zwei konstanten Parametern v, D und einer gaußischen stochastischen Kraft $w(t)$ mit dem Erwartungswert $\langle w(t) \rangle = 0$ und der Korrelation $\langle w(t)w(t') \rangle = \delta(t - t')$.

(a) Leiten Sie aus (1) eine Langevin-Gleichung für den Kurs der Aktie $K(t)$ her.

(b) Berechnen Sie die Kramers-Moyal-Koeffizienten $\Delta^{(1)}$ und $\Delta^{(2)}$ für beide Varianten der Langevin-Gleichung, für (1) und für die Gleichung von (a).

(c) Finden Sie die Fokker-Planck-Gleichungen für die Wahrscheinlichkeitsdichten $P(x, t)$ und $P(K, t)$.

(d) Berechnen Sie $P(x, t)$ durch Lösen der Fokker-Planck-Gleichung zur Anfangsbedingung $P(x, 0) = \delta(x - x_0)$. Berechnen Sie weiterhin $P(K, t) = P(x, t)\, dK/dx$. Überzeugen Sie sich davon, dass beide Varianten der Fokker-Planck-Gleichung exakt löbar sind. Stellen Sie beide Wahrscheinlichkeitsdichten $P(x, t)$ und $P(K, t)$ für eine geeignete Zeit t graphisch dar und diskutieren Sie die Unterschiede.

(e) Aus dem Kramers-Moyal-Koeffizienten $\Delta^{(1)}$ lässt sich eine mittlere Rendite r für die Aktie ermitteln. Man erhält zwei unterschiedliche Ergebnisse, je nachdem welche Variante der Langevin-Gleichung oder Fokker-Planck-Gleichung man betrachtet. Finden Sie eine Begründung für die Unterschiede durch Betrachten der Wahrscheinlichkeitsdichten $P(x, t)$ und $P(K, t)$.

(f) Zeigen Sie, dass man durch Integrieren der kontinuierlichen Langevin-Gleichung (1) die diskrete Gleichung

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = v + D\, W(t) \ . \tag{2}$$

mit der stochastischen Kraft $W(t) = (\Delta t)^{-1} \int_t^{t+\Delta t} dt'\, w(t')$ herleiten kann. Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle W(t) \rangle$ und die Korrelation $\langle W(t)W(t') \rangle$.

(g) Die diskrete Gleichung (2) eignet sich für ein Euler-Verfahren, um die Langevin-Gleichung numerisch auf dem Computer zu lösen. Finden Sie eine Methode, um die stochastische Kraft $W(t)$ explizit mit dem Box-Muller-Verfahren zu berechnen. Entwickeln Sie ein numerisches Verfahren, das die Lösung $x(t)$ zur Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ berechnet.

(h) Berechnen Sie mit dem numerischen Verfahren von (g) viele Realisierungen des stochastischen Prozesses $x(t)$ und der Aktienkurse $K(t)$. Ermitteln Sie über Histogramme die Wahrscheinlichkeitsdichten $P(x,t)$ und $P(K,t)$ zu einer bestimmten Zeit t und vergleichen Sie mit den Ergebnissen von (d). Zeigen Sie, dass die Histogramme gegen die Wahrscheinlichkeitsdichten von (d) konvergieren, wenn man $x(t)$ und $K(t)$ hinreichend oft berechnet.

2. **Binominalbaum-Modell für eine Aktie** *(5 Punkte)*
Die zeitliche Entwicklung des Kurses einer Aktie $K(t)$ zu diskreten Zeiten $t = n\Delta t$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ lässt sich modellieren durch ein diskretes Iterationsverfahren

$$K(t + \Delta t) = \begin{cases} u_+ \, K(t) & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ u_- \, K(t) & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - p \end{cases} \tag{3}$$

mit zwei Faktoren $u_+ > 1$, $u_- < 1$ und einer Wahrscheinlichkeit p im Intervall $0 \leq p \leq 1$. Der Kurs der Aktie erhöht sich also mit der Wahrscheinlichkeit p um den Faktor u_+ und verringert sich mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$ um den Faktor u_-. Am Anfang zur Zeit $t = 0$ ist der Kurs der Aktie $K(0) = K_0$. Das Iterationsverfahren eignet sich für eine numerische Simulation der Aktienkurse $K(t)$, indem man die zwei Fälle in der Gleichung (3) mit Zufallszahlen auswürfelt.

(a) Zeigen Sie, dass nach n Schritten die Zeit $t = n\Delta t$ erreicht wird und der Aktienkurs $K(t)$ die $(n+1)$ diskreten Werte K_i mit Wahrscheinlichkeiten P_i annehmen kann, wobei $i = 0, \ldots, n$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeiten P_i durch die Binominalverteilung gegeben sind.

(b) Zeichnen Sie alle möglichen Kurse $K(t) = K_i$ für alle Zeiten $t = n\Delta t$ als Punkte in ein K-t-Diagramm ein. Verbinden Sie benachbarte Punkte entsprechend der Iteration (3). Zeigen Sie, dass sich eine Baumstruktur ergibt mit zweifachen Verzweigungen zu jedem Zeitpunkt $t = n\Delta t$.

(c) Eine alternative Variable für den stochastischen Prozess ist $x(t) = \ln K(t)$. Zeigen Sie, dass die $(n+1)$ diskreten Werte x_i gleichen Abstand haben.

(d) Berechnen Sie mit der Binominalverteilung die Erwartungswerte $\langle x(t) \rangle$ und $\langle [\Delta x(t)]^2 \rangle = \langle [x(t) - \langle x(t) \rangle]^2 \rangle$. Berechnen Sie entsprechende Erwartungswerte aus den Kramers-Moyal-Koeffizienten $\Delta^{(1)}$ und $\Delta^{(2)}$ von Aufgabe 1. Finden Sie durch Vergleich eine Darstellung der Kramers-Moyal-Koeffizienten durch die Parameter u_+, u_- und p des diskreten Iterationsmodells. Finden Sie weiterhin eine Darstellung der Parameter v und D der Langevin-Gleichung (1) von Aufgabe 1 durch u_+, u_- und p.

(e) Für große n geht die diskrete Binominalverteilung in eine kontinuierliche Gaußverteilung über. Schließen Sie daraus, dass die diskrete Iteration (3) sich für eine numerische Simulation der Langevin-Gleichung (1) eignet. Programmieren Sie die numerische Simulation auf einem Computer.

(f) Berechnen Sie numerisch viele Realisierungen der stochastischen Prozesse $x(t)$ und $K(t)$. Berechnen Sie über Histogramme die Wahrscheinlichkeitsdichten $P(x,t)$ und $P(K,t)$.

Vergleichen Sie mit den Ergebnissen von Aufgabe 1. Wählen Sie die Parameter u_+, u_-, p und die Zeit t so, dass die Wahrscheinlichkeitsdichten $P(x,t)$ und $P(K,t)$ gegen die Ergebnisse von Aufgabe 1 (d) konvergieren.