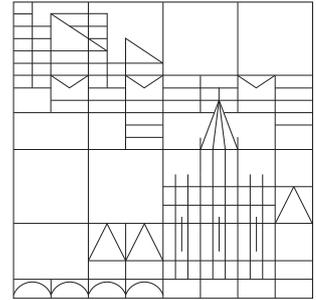


UNIVERSITÄT KONSTANZ  
 Fachbereich Physik  
 Prof. Dr. Matthias Fuchs  
 Raum P 907, Tel. (07531)88-4678  
 E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de  
 PD Dr. Rudolf Haussmann  
 E-mail: rudolf.haussmann@gmx.de



Übungen zur Vorlesung: Stochastische Prozesse  
 mit Anwendung in Statistischer Physik und auf Finanzmärkte,  
 Wintersemester 2011/12

**Übungsblatt 10**, Ausgabe 10.01.2012, Abgabe und Besprechung am 17.1.2012

**1. Zweistufenmodell für Wachstumsunternehmen (4 Punkte)**

Ein Unternehmen erwirtschaftet im ersten Jahr einen Ertrag von  $E_1 = 1$  Mio. Euro. In den Jahren 2 bis  $N$  wächst der Ertrag jeweils um  $g_A = 9\%$ , danach nur noch um  $g_B = 2\%$ . Die Kapitalkosten eines Unternehmens in dieser Risikoklasse seien  $r = 10\%$ .

- Überlegen Sie sich, welche Erträge  $E_t$  der Anleger in den Jahren  $t = 1, 2, \dots, \infty$  erhält.
- Berechnen Sie den Barwert  $W_0$  des Unternehmens zum gegenwärtigen Zeitpunkt  $t = 0$ . Was ergibt sich explizit, wenn die Wachstumsphase  $N = 2, 5, 10, 20, 50$  oder 100 Jahre andauert?
- Zeigen Sie, dass sich im Grenzfall ewigen Wachstums  $N \rightarrow \infty$  die Standardformel  $W_0 = E_1/(r - g)$  ergibt mit  $g = g_A$ . Zeigen Sie weiterhin, dass die Standardformel eine obere Schranke für den Barwert darstellt. Vergleichen Sie mit den expliziten Ergebnissen von (a).
- Wie lange muss das Wachstum mindestens andauern, so dass die Standardformel von (b) den Barwert mit 5% Genauigkeit liefert? Bestimmen Sie hierzu den minimalen Wert von  $N$ .

**2. Ertragswert eines Unternehmens mit neuer Investition (4 Punkte)**

Ein Unternehmen führt eine größere Investition innerhalb der nächsten drei Jahre durch, so dass die Cashflows negativ sind:  $C_1 = C_2 = C_3 = -7$  Mio. Euro. Die darauf folgenden neun Jahre fahren die Ernte mit hohen positiven Cashflows  $C_4 = C_{12} = +5$  Mio. Euro ein. In den nachfolgenden Jahren ist der Cashflow konstant  $C_t = +2$  Mio. Euro für alle  $t > 12$ . Durch Kapitalisierung der Investition und nachfolgende Abschreibungen wird erreicht, dass in der Bilanz der konstante Gewinn  $G_t = +2$  Mio. Euro für alle  $t = 1, 2, \dots, \infty$  ausgewiesen wird. Die Kapitalkosten eines Unternehmens in dieser Risikoklasse seien  $r = 10\%$ .

- Zeigen Sie, dass die Kapitalisierungen und Abschreibungen korrekt und konsistent durchgeführt wurden, so dass über einen längeren Zeitraum die Summe der Gewinne gleich der Summe der Cashflows ist, also  $\sum_{t=1}^T G_t = \sum_{t=1}^T C_t$  für  $T > 12$ .
- Berechnen Sie den Barwert des Unternehmens  $W_0$  mit den Gewinnen als Erträgen.
- Berechnen Sie den Barwert des Unternehmens  $W_0$  mit den Cashflows als Erträgen.
- Diskutieren Sie den Unterschied der beiden Ergebnisse von (b) und (c). Welche Berechnungsmethode kommt der Wahrheit näher und warum?

### 3. Box-Muller Verfahren (4 Punkte)

Beim Lösen stochastischer Differentialgleichungen oder auch bei Computersimulationen werden häufig gaußverteilte Zufallsvariablen benötigt. Die sogenannte Box-Muller Methode ist ein Verfahren, welches aus gleichverteilten Werten gaußverteilte Werte generiert.

- (a) Sei  $x$  zunächst gleichverteilt auf  $[0, 1]$ .

Geben Sie die Dichte einer Zufallsvariablen  $y$  an, die gaußverteilt mit Varianz 1 ist. Überlegen Sie sich nun, dass man durch Transformation der Dichte von  $x$

$$\int_0^{x^*} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y^*} \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right] dy$$

erhält. Folgern Sie  $y^* = \sqrt{2}\operatorname{erf}^{-1}(2x^* - 1)$ . Was hat man also erreicht?

- (b) Seien nun  $y_1, y_2$  gaußverteilt. Gehen Sie über zu Polarkoordinaten  $y_1 = r \cos \varphi$  und  $y_2 = r \sin \varphi$  über und transformieren Sie die gemeinsame Dichte. Überlegen Sie sich den Zusammenhang mit zwei auf  $[0, 1]$  gleichverteilten Zufallsvariablen  $x_1, x_2$ .

*Hinweis: Die benötigten Transformationen sind durch*

$$y_1 = \sqrt{-2 \ln x_2} \cos(2\pi x_1) \quad y_2 = \sqrt{-2 \ln x_2} \sin(2\pi x_1)$$

*gegeben.*

Was hat man jetzt erreicht?

- (c) Programmieren Sie die Verfahren aus a) und b) und überprüfen Sie mit einem Histogramm obige Formeln.