UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Matthias Fuchs
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de
PD Dr. Rudolf Haussmann
E-mail: rudolf.haussmann@gmx.de

Übungen zur Vorlesung: Stochastische Prozesse
mit Anwendung in Statistischer Physik und auf Finanzmärkte,
Wintersemester 2011/12

Übungsblatt 1, Ausgabe 25.10.2011, Abgabe und Besprechung am 01.11.2012

1. **Binomialverteilung** *3 Punkte*
Wir betrachten ein Zufallsexperiment mit N Zufallsvariablen X_i, $i \in \{1, ..., N\}$ mit diskretem Wertebereich $\{0, 1\}$ und $P(X_i = 0) = P(X_i = 1) = 0.5$. Weiter definieren wir die Summe dieser Zufallsvariablenn zu $T = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Ein reales Beispiel hierfür ist der N-fache Wurf einer Münze wobei wir dem Ergebnis 'Kopf' die Null und dem Ergebnis 'Zahl' den Wert Eins zuordnen. T ist dabei nun die Summe aller so erhaltenen Einsen und Nullen.

   (a) Bestimmen Sie die Verteilung $B_N(m)$ von T. Wobei m die Summe der gezogenen Einsen ist.

   (b) Gehen Sie nun über zum verallgemeinerten Fall $P(X_i = 0) = q$ und $P(X_i = 1) = p$ wobei $p + q = 1$ ist: Zeigen Sie dass dann $W_N(m) = \frac{N!}{m!(N-m)!} p^m q^{N-m}$ gilt.

   (c) Berechnen Sie das erste und zweite Moment $\langle m \rangle$ und $\langle (m - \langle m \rangle)^2 \rangle$ dieser Verteilung.

   (d) Gehen Sie nun zur Variable $x = \frac{m-Np}{\sqrt{Npq}}$ über. Betrachten Sie nun den Grenzfall $N \gg m \gg 1$ und zeigen Sie, dass dann $W_N(m) \propto \exp[-\frac{x^2}{2}]$ gilt. Was erhält man also für eine Verteilung?
   Hinweis: Benutzen Sie zunächst die Stirlingformel $\ln K! \approx K \ln K - K$. *Eliminieren sie* m *mit* x. *Führen Sie dann eine Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung durch.*

   (e) Betrachten Sie jetzt $W_N(m)$ für $N \to \infty$ und $p \to 0$ bei $Np = const.$ und zeigen Sie, dass $W_N(m) \to \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$. Wie heißt die Verteilung?
   Hinweis: Setzen Sie $Np = \lambda$.

   (f) Bestimmen Sie das erste und zweite Moment der Verteilung aus e).

2. **Begegnungswahrscheinlichkeiten** *1 Punkt*
Zwei Personen kommen zwischen 12 und 13 Uhr in den Hörsaal, und verweilen dort jeweils 20 Minuten. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich beide Personen begegnen?
(Der Ankunftszeitpunkt beider Personen ist gleichverteilt, und unabhängig voneinander.)

3. **Tschebyschow Ungleichung** *2 Punkte*
   Eine Zufallsvariable X und ihre Wahrscheinlichkeitsdichte f seien gegeben. Der Erwartungswert sei $\overline{X}$, und die Varianz σ^2.

   (a) Zeigen Sie, dass o.B.d.A $\overline{X} = 0$ und $\sigma^2 = 1$ angenommen werden kann.
   Hinweis: Variablentransformation

   (b) Zeigen Sie $P(|X| \geq m\sigma) \leq \frac{1}{m^2}$. Die Wahrscheinlichkeit einen Wert, der größer als m-Mal die Standardabweichung ist, ist kleiner als $1/m^2$.
   Hinweis: Benutzen Sie die Definition der Varianz und Schätzen Sie das Integral ab.

4. **Gezinkte Würfel** *2 Punkte*
   Am 26. Oktober 1881 beendete der Zahnarzt und passionierte Glücksspieler *John Henry 'Doc Holliday'* in Tombstone/Arizona vorzeitig ein Würfelspiel mit einem Namenlosen. Ihm war aufgefallen, dass die 6 offensichtlich doppelt so häufig geworfen wurde, wie die 1. Für die anderen Augenzahlen hatte er nichts Signifikantes beobachtet.
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_i für $i = 1, .., 6$ Augen mittels des von *Ludwig Boltzmann* in Wien/Österreich in etwa zur selben Zeit entwickelten Konzepts der maximalen Entropie $S = -\sum_{i=1}^{6} p_i \ln p_i$.
   Formulieren Sie zunächst aus Doc Hollidays Beobachtungen die Nebenbedingungen an die Wahrscheinlichkeiten und wenden Sie dann das Extremalprinzip der Entropie unter diesen Nebenbedingungen an.