UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Matthias Fuchs
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zu „Brownsche Bewegung und Statistische Physik“

Übungsblatt 5: Sedimentation

Brownsche Bewegung im Gravitationsfeld
Die Brownsche Bewegung im Gravitationsfeld, die sogenannte Sedimentation, wurde zuerst von Chandrasekhar 1943 untersucht, und ist immer noch ein aktives Forschungsgebiet der Kolloidphysik. In dieser Aufgabe soll nun ein einzelnes diffundierendes Teilchen betrachtet werden, wobei die Relevanz der Randbedingungen bei einer solchen partiellen Differentialgleichung eindrücklich zu Tage tritt.

1. Die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Ort $\mathbf{r}$ eines Kolloids zur Zeit t ist durch die Smoluchowski-Gleichung gegeben

$$\frac{\partial P(\mathbf{r},t)}{\partial t} = D\nabla^2 P(\mathbf{r},t) + \mathbf{K}\cdot\nabla P(\mathbf{r},t),$$

wobei D die Diffusionskonstante und $\mathbf{K} = (0, 0, Dmg/(k_B T))$ mit m der Teilchenmasse und g der Beschleunigung aufgrund der Gravitation. Die Gravitation wirkt also in die z-Richtung. Welche physikalische Bedeutung besitzen die einzelnen Terme? Benutzen Sie die Methode der Separation der Variablen um Folgendes zu zeigen: $P(\mathbf{r},t) = f(x,t)f(y,t)w(z,t)$ mit

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right),$$

und für $w(z,t)$ gilt:

$$\frac{\partial w(z,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2} + c\frac{\partial w(z,t)}{\partial z},$$

mit $c = Dmg/(k_B T)$. Da die Diffusion in der xy Ebene durch die Gravitation nicht beeinflusst wird, betrachten wir nur noch die Bewegung in z-Richtung.

2. Die Ausgangshöhe des Teilchens sei $z_0 > 0$ und eine undurchlässige Wand sei in der xy-Ebene bei $z = 0$. Dies sei die einzige Begrenzung für das Teilchen. Wieso sind folgende Anfangs- und Randbedingungen sinnvoll?

$$\begin{aligned} &w \to \delta(z - z_0) \qquad t \to 0 \\ &D\frac{\partial w}{\partial z} + cw = 0 \quad z = 0 \qquad t > 0. \end{aligned}$$

Substituieren Sie $w(z,t) = U(z,t)\exp[-c(z-z_0)/(2D) - c^2t/(4D)]$ um eine einfachere Gleichung für $w(z,t)$ zu erhalten. Wie lauten die entsprechenden Anfangs- und Randbedingungen für $U(z,t)$.

3. Die Randbedingung erschwert die Lösung der Diffusionsgleichung für $U(z,t)$, die noch analytisch möglich ist:

$$\begin{aligned} U(z,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\Big(\exp[-(z-z_0)^2/(4Dt)] + \exp[-(z+z_0)^2/(4Dt)]\Big) \\ &+ \frac{c}{D\sqrt{4\pi Dt}} \int_{z_0}^{\infty} dz' \exp\left(-\frac{(z'+z)^2}{4Dt} + \frac{c(z'-z_0)}{2D}\right). \end{aligned}$$

Teile der Lösung erhält man, indem man die Methode der Bildladungen, bekannt aus der Elektrostatik, analog anwendet. Welche Randbedingung erfüllen die ersten beiden Terme, was muss man ändern damit $U(z=0,t)=0$ gilt. Wie lautet also die Greensche Funktion in diesem Fall, und welche Interpretation erhält damit der dritte Term. Verifizieren Sie, dass die angegebene Lösung die Randbedingung erfüllt. Bestimmen Sie die Lösung des eigentlichen Problems $w(z,t)$ und machen Sie eine Skizze für verschiedene Zeiten. Im Limes $t \to \infty$ erhalten Sie die bekannte Gleichgewichtsverteilungsolution. Wie lautet damit die mittlere Höhe des Teilchens im Gleichgewicht?