UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Matthias Fuchs
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zu 'Brownsche Bewegung und Statistische Physik'

Übungsblatt 3: Die Langevin Gleichung

Die Brownsche Molekularbewegung war zu Beginn des 20. Jahrhunderts noch immer ein Rätsel. Albert Einstein lieferte 1905 eine Erklärung und gleichzeitig eine Bestätigung der Atom-Theorie, indem er aufzeigte, dass suspendierte Teilchen, getrieben von den Kollisionen mit den Atomen der Flüssigkeit, genau solche *Brownsche* Bewegung ausführen müssen. Er stellte dabei folgende Formel für das *arithmetische Mittel der Quadrate der Verrückung* im Limes $t \to \infty$ auf:

$$\left\langle x^2 \right\rangle = 2Dt, \qquad \text{wobei } D \text{ der Diffusionskoeffizient ist.}$$

Langevin präsentierte drei Jahre später eine intuitiv einleuchtende Bewegungsgleichung. Darin kamen zwei Kräfte vor: Zunächst eine Reibungskraft, proportional zur Geschwindigkeit und dem Vorfaktor $-6\pi\eta\sigma$. Dabei ist η die Viskosität der Flüssigkeit und σ der Durchmesser des (näherungsweise) kugelförmigen Teilchens. Die zweite Kraft ist eine stochastische Größe f_s, die die atomaren Kollisionen darstellt.

1. Stellen Sie die Langevin-Gleichung auf und zeigen Sie, dass sie in folgenden Ausdruck umgeformt werden kann:

   $$\frac{1}{2}m\frac{d^2}{dt^2}\left(x^2\right) - mv^2 = -3\pi\eta\sigma\frac{d}{dt}\left(x^2\right) + xf_s.$$

   Hier sind m die Masse und v die Geschwindigkeit des Teilchens. Vergegenwärtigen Sie sich, welche Rolle die stochastische Kraft spielt. Was für Aussagen lassen sich über $x(t)$ treffen? Was für Lösungen kann man erwarten?
   Erläutern Sie, was für Werte $\langle f_s \rangle$ und $\langle f_s(t)f_s(0)\rangle$ annehmen.

2. Indem Sie mitteln, $\langle xf_s \rangle = 0$ annehmen und das Gleichverteilungsgesetz nutzen, zeigen Sie, dass

   $$\frac{1}{2}m\frac{d^2}{dt^2}\left\langle x^2 \right\rangle + 3\pi\eta\sigma\frac{d}{dt}\left\langle x^2 \right\rangle = k_BT.$$

   Finden sie die allgemeine Lösung:

   $$\frac{d}{dt}\left\langle x^2 \right\rangle = \frac{k_BT}{3\pi\eta\sigma} + C\exp\left(\frac{-6\pi\eta\sigma}{m}t\right).$$

   Wann ist die Exponentialfunktion wichtig? Wann nicht? Im letzteren Fall stellen sie eine Gleichung für das mittlere Verschiebungsquadrat auf und kombinieren sie diese mit Einsteins Ergebnis, um die Einsteinrelation

   $$D = \frac{k_BT}{6\pi\eta\sigma}$$

   zu erhalten. Sie ist ein Beispiel für das Fluktuations-Dissipations Theorem, das die Diffusion mit der Viskosität verbindet. Nutzen Sie das Ergebnis, um mit Hilfe der Gaskonstante $R = 8,314JK^{-1}$ die Avogadrosche Zahl zu bestimmen.

3. Fassen Sie in Worte, was die Annahme $\langle x f_s \rangle = 0$ bedeuted. Wann oder unter welchen Umständen ist diese Vereinfachung zulässig? Berechnen Sie $\langle v f_s \rangle = 0$.

4. Wiederholen Sie die Rechnung nun für die dreidimensionale Langevin-Gleichung. Beginnen Sie mit der Bewegungsgleichung und beachten Sie, dass auch die stochastische Kraft dreidimensional ist. Nehmen sie wiederum an, dass sowohl $\langle \mathbf{f}_s \rangle = 0$ als auch $\langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{f}_s \rangle = 0$. Finden Sie mit der Randbedingung $\mathbf{r}(0) = 0$ folgenden Ausdruck für das mittlere Verschiebungsquadrat:

$$\langle r^2 \rangle = \frac{k_B T}{\pi \eta \sigma} \left[t - \frac{m}{6\pi\eta\sigma} \left(1 - \exp\left(-\frac{6\pi\eta\sigma}{m} t \right) \right) \right].$$

Definieren Sie die Zeitskala $\tau = \frac{m}{6\pi\eta\sigma}$ und betrachten Sie die Ergebnisse für $t \ll \tau$ sowie $t \gg \tau$.