UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Matthias Fuchs
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zu ‘Brownsche Bewegung und Statistische Physik’

Übungsblatt 1: Der Zentrale Grenzwertsatz

Der zentrale Grenzwertsatz ist sehr fundamental und spielt eine wichtige Rolle in theoretischer und experimenteller Physik. Der Satz besagt, dass die Summe von n stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen annähernd normalverteilt für $n \to \infty$ ist. Wir betrachten n gleichverteilte stochastische Variablen ξ_i mit Mittelwert $\bar{\xi}$ und Abweichung σ^2. Die Variable

$$\eta_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \bar{\xi})$$

hat die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P_\eta(y) = \int d^n x P_n(\mathbf{x}) \, \delta \left(y - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{\xi}) \right)$$

wobei $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$.
Zeigen Sie, dass für unabhängige und gleichverteilte ξ_i die ‘Charakteristische Funktion’ (d.h. die Fourier-Transformierte von $P_\eta(y)$) gegeben ist durch

$$\phi_\eta(k) = \left[\exp\left(-\frac{ik\bar{\xi}}{\sqrt{n}} \right) \int dx P_1(x) \exp\left(-\frac{ikx}{\sqrt{n}} \right) \right]^n$$

$P_1(x)$ ist die Verteilung einer einzelnen Variable.
Verwenden Sie die Kumulantenentwicklung der Charakteristische Funktion

$$\phi_\xi \left(k/\sqrt{n} \right) = \int dx P_1(x) \exp\left(-\frac{ikx}{\sqrt{n}} \right)$$

um zu zeigen, dass für $n \to \infty$

$$\phi_\eta(k) = \exp\left(-\frac{k^2 \sigma^2}{2} \right)$$

gilt. Nehmen Sie hierbei an, dass alle Kumulanten $\langle \xi^l \rangle_c$ endlich sind. Eine Fourier Rücktransformation liefert das gewünschte Ergebnis

$$P_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2} \right)$$

Wie lautet die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte von $\zeta_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ für große n?