UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Matthias Fuchs
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Statistischen Mechanik
Wintersemester 2007/08

Übungsblatt 4, Ausgabe 13.11.2007, abzugeben bis 19.11.2007

Präsenzaufgaben

19. **Klassisches ideales Gas im kanonischen Ensemble**
Gegeben sei ein System von N wechselwirkungsfreien identischen Punktteilchen in einem Volumen V. Sein Hamilton-Operator lautet

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m}.$$

(a) Berechnen Sie die Zustandssumme Z des Systems in der kanonischen Gesamtheit unter der Annahme der Ununterscheidbarkeit der Teilchen und drücken Sie das Ergebnis mit Hilfe der thermischen Wellenlänge

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2\beta}{m}}$$

aus.
Hinweise:

$$\int_0^\infty dx\; x^2 e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{16\,\alpha^3}}$$

$$N! \approx N^N\, e^{-N}\sqrt{2\pi N} \approx N^N\, e^{-N} = e^{N\,ln\frac{N}{e}}$$

Weswegen kann letztere Vereinfachung gemacht werden?

(b) Diskutieren Sie klassisches und quantenmechanisches Regime anhand des Vergleichs der thermischen Wellenlänge mit dem mittleren Teilchenabstand im System.

(c) Die thermische Wellenlänge λ entspricht einer de Broglie-Wellenlänge. Berechnen Sie den zugehörigen Impuls p_{th} und die Energie E_{th}.

(d) Bestimmen Sie die mittlere Energie $\langle E\rangle$ des Gases und verifizieren Sie den Gleichverteilungssatz für die Energie.

(e) Berechnen Sie den Druck P und leiten Sie die Zustandsgleichung des Gases her.

(f) Berechnen Sie das chemische Potential $\beta\mu = -\frac{\partial}{\partial N} lnZ$.

(g) Bestimmen Sie die Entropie und erklären Sie, welches Vorzeichen der Ausdruck für S haben kann. Was geht u. Umständen schief?
Leiten Sie unter der Annahme konstanter Entropie die Adiabatengleichung

$$pV^\kappa = const$$

ab.

schriftlich

20. **Erwartungswerte für den HO im klassischen und quantenmechanischem Grenzfall**

(4 Punkte)

(a) Der Erwartungswert $\langle \hat{x}^2 \rangle$ soll für den quantenmechanischen Harmonischen Oszillator mit Hilfe des Virialsatzes und dem Ergebnis für die Gesamtenergie aus Aufgabe 13 berechnet werden. Geben Sie das Ergebnis im Falle hoher und niedriger Temperaturen an.

(b) Wie lautet das Ergebnis nach dem Gleichverteilungssatz im klassischen Fall? Bestimmen Sie $\langle E \rangle, S$ und die Zustandssumme Z in der klassischen kanonischen Gesamtheit und vergleichen Sie mit Aufgabe 13.

21. **Langevin Paramagnetismus (4 Punkte)**
Vor der Entdeckung der Quantenmechanik entwarf Langevin ein klassisches Modell zur Erklärung des Paramagnetismus. Er nahm an, dass jedes magnetische Molekül ein permanentes magnetisches Moment $\boldsymbol{\mu}$ besitze, welches als Vektor frei rotieren könne. Für die Energie eines magnetischen Moments setzte er $E = -\boldsymbol{\mu}\mathbf{B}$.

a) Von welchen Variablen hängt die Wahrscheinlichkeitsdichte eines einzelnen magnetischen Momentes ab und wie lautet sie in der kanonischen Gesamtheit? Wie lautet das geeignete 'Volumenelement' zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit?

b) Bestimmen Sie die Zustandssumme von N unabhängigen magnetischen Momenten nach Langevin und leiten Sie daraus durch Differentiation die mittlere Magnetisierung und die magnetische Suszeptibilität bei $B = 0$ ab. In welchem Grenzfall erkennen Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 17 wieder, und welcher Unterschied bleibt jedoch auch in diesem Limes bestehen?

22. **Paramagnetische Salze in mikrokanonischer Gesamtheit (6 Punkte)**
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von N unabhängigen Spins im konstanten Magnetfeld soll in der sogenannten 'mikrokanonischen' Gesamtheit bestimmt werden, in welcher alle möglichen Einstellungen der Spins, die zu einer Energie E im Bereich $[E, E + \Delta E]$ führen, gleichwahrscheinlich sind, also:

$$p(E, B, N) = \frac{1}{W} \qquad \text{mit } W \text{ der Anzahl von Energiezuständen in } [E, E + \Delta E]$$

wobei in diesem Problem die Energie diskrete Werte E_n annimmt. Der Hamiltonoperator der Spins (mit $S = \hbar/2$) laute $H = \mu_B B \sum_{i=1}^{N} \sigma_i$, mit $\sigma_i = \sigma_{z,i}$ einer Pauli-z-Matrix.

a) Wieviele und welche Energieniveaus E_n gibt es, und wie lautet der Energieabstand zwischen ihnen? Im Folgenden seien die E_n aufsteigend angeordnet $E_0 < E_1 < E_2 \ldots$.

b) Zeigen Sie, dass die Anzahl von Spinzuständen zur Energie E_n (d.h. der Entartungsgrad) durch die Binomialkoeffizienten $N!/n!(N-n)!$ gegeben ist.
Hinweis: Siehe Aufgabe 1.

c) Damit $W = \frac{\Delta E}{2\mu_B B} \frac{N!}{n!(N-n)!}$ gesetzt werden kann, muss der Entartungsgrad (fast) konstant sein, wenn die Energie um ΔE variiert. Diskutieren Sie, wie ΔE gewählt werden kann.

d) Bestimmen Sie mit Stirlings Näherung $N! = N^N e^{-N}\sqrt{2\pi N}$ die Größen A und S (in führender Ordnung in N für große N) in folgendem Ausdruck:

$$W = A\frac{\Delta E}{2\mu_0\beta}\, e^{S/k_B}$$

Drücken Sie zuerst S durch n/N aus und substituieren Sie dann $r = \frac{E}{N\mu_B B}$. Zeigen Sie, dass die Entropie $S(E, B, N)$ linear mit N anwächst, und skizzieren Sie S als Funktion von E.
Hinweis: Das Ergebnis kennen Sie von Aufgabe 9.

e)* Wenn eine feste Gesamtenergie $E_n$vorgegeben ist, sind zwei verschiedene Spins a priori nicht unabhängig. Zeigen Sie, dass jedoch im Grenzfall große N, die Wahrscheinlichkeit zweier Spins i und j faktorisiert $p_2(\sigma_i, \sigma_j) = p_1(\sigma_i)p_1(\sigma_j)$. Wie lautet $p_1(\sigma)$?
Hinweis: Betrachten Sie zur Vereinfachung die Spins 1 und 2. Begründen Sie zuerst, dass $p_1(\sigma_1) = W_+/W$ ist, wobei W_+ die Anzahl aller Spineinstellungen von $N - 1$ Spins ist, die zur Gesamtenergie $[E_n - \sigma_1\mu_B B]$ passen. Drücken Sie $\ln p_1(\sigma_1)$ mit der Entropie aus, und führen Sie eine Taylorentwicklung durch. Wiederholen Sie nun diese Rechnung für $p_2(\sigma_1, \sigma_2)$ und verwenden Sie den Grenzfall große N.

f)* Bestimmen Sie die Größe $\beta = \frac{1}{k_B}\partial S/\partial E$ als Funktion von E, B und N. Drücken Sie mit ihr das Verhältnis $p_1(\sigma_i = +1)/p_1(\sigma_i = -1)$ von Aufgabenteil e) aus und bestimmen Sie, unter Verwendung der Normierung, $p_1(\sigma_i)$ als Funktion von β und B.

g) Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme $Z(\beta) = \sum_n w_n e^{\beta E_n}$ durch explizite Summation mit den Entartungsgraden w_n des Energieniveaus E_n.

23. **Oberfläche der d–dimensionalen Kugel (4 Punkte)**
Für einige Betrachtungen in der Statistischen Mechanik wird die Oberfläche einer d–dimensionalen Kugel benötigt.

(a) Berechnen Sie das d–dimensionale Gauss'sche Integral durch Rückführung auf unabhängige eindimensionale Integrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dp_d\, \exp(-(p_1^2 + \cdots p_d^2)).$$

(b) Drücken Sie obiges Integral in Polarkoordinaten aus und führen Sie die radiale Integration durch. Zeigen Sie hiermit, ohne die Winkelintegrale auszuführen, dass gilt:

$$\int d^d p\, \delta(1 - |\mathbf{p}|) = \int d\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)},$$

wobei $\Gamma(x)$ die Gamma–Funktion und $d\Omega_d$ das d–dimensionale Oberflächenelement ist. Verifizieren Sie Ihre Ergebnisse für $d = 1, 2$ und 3.