UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Matthias Fuchs
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Statistischen Mechanik
Wintersemester 2007/08

Übungsblatt 11, Ausgabe 15.01.2008, abzugeben bis 21.01.2008

Präsenzaufgaben

58. **Phononen und die spezifische Wärme (6 Punkte)**
Eine Reihe von Versuchen sind unternommen worden, die Wärmekapazität von Kristallen zu erklären. Die klassische Theorie von Dulong und Petit zog den Gleichverteilungssatz heran, um den temperaturunabhängigen Wert $C_V = 3Nk_B$ zu etablieren. Einstein ging einen Schritt weiter, indem er ein Modell von N unabhängigen Oszillatoren vorschlug. Es war allerdings erst Debye, der erkannte, dass das Problem eher über die fundamentalen Moden von N gekoppelten Oszillatoren — den Phononen — gelöst werden sollte. Hier wollen wir einige Aspekte der Debye Theorie beleuchten.

(a) Machen Sie sich klar, dass die Phononenzustandsdichte durch

$$D(\omega) = \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda} \delta(\omega - \omega_{\vec{k}\lambda})$$

ausgedrückt werden kann, wobei $\vec{k}$ den Wellenvektor und λ die Polarisation (eine longitudinale und zwei transversale) der Phononen mit der Frequenz ω darstellt. Berechnen Sie $D(\omega)$, indem Sie von der Summe über $\vec{k}$ zu einer Integration im k-Raum übergehen (vgl. Aufgabe 53) und die lineare Dispersionrelation $\omega_l = v_l \cdot |\vec{k}|, \omega_t = v_t \cdot |\vec{k}|$ für Phononen verwenden. Schreiben Sie das so erhaltene $D(\omega)$ mit Hilfe einer mittleren Schallgeschwindigkeit v um, zu

$$D(\omega) = V \frac{\omega^2}{2\pi^2 v^3}.$$

Wie lautet der Ausdruck für $1/v^3$?

(b) In einem Kristall mit N Atomen erwarten wir $3N$ Moden. Diese Tatsache definiert die Debye Frequenz ω_D:

$$\int_0^{\omega_D} \mathrm{d}\omega \; D(\omega) = 3N.$$

Errechnen Sie einen expliziten Ausdruck für ω_D. Drücken Sie Debye Zustandsdichte $D(\omega)$ über ω_D anstatt über v aus. Wie verändert sich die Zustandsdichte im Vergleich zum obigen Aufgabenteil für $\omega > \omega_D$?

(c) Die Debye Temperatur ist definiert durch $k_B\Theta_D = \hbar\omega_D$. Da die Zahl der Phononen nicht konstant ist, gehorchen sie der Boseverteilung mit dem chemischen Potential $\mu = 0$. Betrachten Sie die Gesamtenergie U

$$U = U_0 + \int_0^{\infty} \mathrm{d}\omega \; D(\omega) \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1},$$

wobei U_0 die Nullpunktsenergie (harm. Oszillator) ist. Formen Sie das Integral mit Hilfe der Substitution $x = \beta\hbar\omega$ um, so dass es dimensionslos ist und betrachten Sie die folgenden beiden Fälle für die spezifische Wärme C_V:

i. $T \ll \Theta_D$, was so viel bedeutet wie $\beta\hbar\omega_D \gg 1$. *Hinweis:*

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x \, \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}.$$

ii. $T \gg \Theta_D$. *Hinweis:* Entwickeln Sie die Exponentialfunktion für kleine x bis zur ersten Ordnung.

Was fällt Ihnen im Vergleich mit dem klassischen Ergebnis nach Dulong und Petit auf?

(d) Was könnte der Grund für die sehr hohe Debye Temperatur von 2220 K von Diamant sein? Was folgt daraus für die Wärmeleitfähigkeit?

schriftlich

59. Der Weiße Zwerg (4 Punkte)

Sterne mit einer anfänglichen Masse M, die nur etwas größer ist als die Sonnenmasse $M_\odot$, beenden die Phase des Wasserstoff- und Heliumbrennens als Weiße Zwerge mit C_{12}/O_{16}-Kern. In dieser stabilen Konfiguration hält der Quantendruck eines entarteten Elektronengases der Gravitation die Waage.

(a) Verifizieren Sie zunächst, dass sich der Weiße Zwerg als vollständig entartetes Elektronengas beschreiben läßt. Berechnen Sie hierzu die Elektronendichte unter der Annahme, dass der Weiße Zwerg aus einer Mischung aus Elektronen und He_4^{++}-Ionen (nur das Verhältnis der Massen zur Ladung e^-/u ist entscheidend) besteht, und das chemische Potential μ_0 bei $T = 0$ als Funktion der Elektronendichte.
Vergleichen Sie die Fermi-Temperatur T_F des Systems mit der mittleren Temperatur T_c im Inneren eines Weißen Zwerges.

Einige Zahlenangaben:
Masse $M = 2.0 \cdot 10^{30}$kg, atomare Masseneinheit $u = 1.66 \cdot 10^{-27}$kg, Temperatur im Zentrum $T_c = 10^7$K, Radius $R = 5 \cdot 10^6$m

(b) Berechnen Sie den Druck für $T = 0$ im Falle relativistischer Elektronen.
Hinweis: Das Ergebnis lautet

$$P = \frac{1}{3\pi^2\hbar^3} \int_0^{p_F} dp \, p^3 \frac{\partial\varepsilon}{\partial p}$$

Führen Sie die Hilfsvariable $x = p/mc$ ein und entwickeln Sie den Integranden für $x \ll 1$ und $x \gg 1$ bis zur $\mathrm{O}(x^2)$. Welche Grenzfälle werden hierdurch beschrieben?

(c) Im Weißen Zwerg kompensiert der Quantendruck des Elektronengases den Gravitationsdruck, der sich wie

$$P_G \simeq -\frac{G}{4\pi} \frac{M^2}{R^4}$$

verhält. Machen Sie sich diesen Ausdruck plausibel, indem Sie die Änderung der Gravitationsenergie $E_G \simeq -GM^2/R$ einer Kugelschale mit einer Volumenarbeit gleichsetzen. Der Einfachheit halber kann von einer homogenen Dichteverteilung ausgegangen werden. Formen Sie das Ergebnis aus b) für $x_F \gg 1$ um, so dass es statt vom Fermi-Impuls p_F bzw. ε_F oder der Elektronendichte nun von der Masse M und dem Radius R abhängt. Lösen Sie die Gleichgewichtsbedingung nach R auf.

Welchen erstaunlichen Zusammenhang erhalten Sie für $R(M)$?
Welchen Wert erhalten Sie für die *Chandrasekhar*-Grenzmasse?

60. **Graphene (6 Punkte)**
Eine Schicht von Graphite, die nur eine atomare Monolage dick ist, wird als Graphene bezeichnet; New York Times, 10. April 2007, B. Trauzettel, Physik Journal **6**, 39 (Juli 2007). Die elektronische Bandstruktur von Graphene lässt sich genähert schreiben als:

$$\varepsilon^{\pm}_{\mathbf{k}} = \pm\hbar v\ k$$

wobei $\mathbf{k}$ ein zweidimensionaler Wellenvektor mit Länge k ist, die Geschwindigkeit $v \approx 10^6$m/s und zweifache Spinentartung autritt. Diese Anregungen lassen sich also als masselose Spin $\frac{1}{2}$ Dirac Fermionen zu den positiven und negativen Energien auffassen.

(a) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit ein Elektron mit Energie $\varepsilon = \mu + \delta$ zu finden gleich der Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Elektron bei der Energie $\varepsilon = \mu - \delta$ fehlt; dort also ein Loch auftritt.

(b) Bei verschwindender Temperatur $T = 0$ sind alle Dirac-Zustände mit negativer Energie besetzt und alle mit positiver Energie unbesetzt; es folgt also $\mu(T = 0) = 0$. Welches Ergebnis folgt aus Aufgabenteil a für das chemische Potential $\mu(T)$ bei endlichen Temperaturen?

(c) Zeigen Sie, dass die mittlere Energie einer Fläche A von Graphene bei endlicher Temperatur lautet:

$$E(T) - E(0) = 4A \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\varepsilon^+_{\mathbf{k}}}{\exp\{\beta\ \varepsilon^+_{\mathbf{k}}\} + 1}$$

Wie lautet das explizite Ergebnis?

(d) Wie lautet die spezifische Wärme dieser masselosen Dirac Fermionen?

(e) Gitterschwingungen (Phononen) tragen auch zur spezifischen Wärme bei. Ein typischer Wert der Schallgeschwindigkeit ist $2\ 10^4$ m/s. Schätzen Sie ab, ob bei niedrigen Temperaturen der phononische oder der elektronische Beitrag dominiert.

61. **Bose-Gas in harmonischer Falle (6 Punkte)**
Mit Hilfe von Lasern lassen sich bestimmte Gase, die in optischen Fallen eingesperrt sind, auf sehr tiefe Temperaturen abkühlen. Mitte der 90er Jahre gelang sowohl E. Cornell und C. Wieman als auch W. Ketterle mit dieser Technik die Herstellung eines sogenannten Bose-Einstein Kondensats. Für diese Arbeit erhielten Sie 2001 gemeinsam den Nobelpreis in Physik. In dieser Aufgabe soll ein vereinfachtes Modell dieses Effekts betrachtet werden.

(a) Die großkanonische Zustandssumme von nichtwechselwirkenden Bosonen ist gegeben durch

$$\beta\Omega = \sum_{\mathbf{n}} \ln(1 - ze^{-\beta\epsilon_{\mathbf{n}}}),$$

wobei die Energieeigenwerte der einzelnen Teilchen $\epsilon_{\mathbf{n}} = \hbar\omega(n_x + n_y + n_z)$ und $z = \exp\beta\mu$ die Fugazität. Finden Sie eine Beziehung zwischen der Teilchenzahl N und der Fugazität z.

(b) Teilen Sie die Zustandssumme in einen Anteil für den Grundzustand und für den Rest auf. Der Restterm kann als Integral ausgedrückt werden.

(c) Bestimmen Sie den Wert von z bei dem die Kondensation stattfindet und zeigen Sie, dass die kritische Temperatur für den Übergang gegeben ist durch

$$k_B T_c = \hbar\omega \left(\frac{N}{g(1)} \right)^{1/3} \gg \hbar\omega,$$

mit $g(z) = \sum_{j=1}^{\infty} z^j / j^3$.

(d) Bestimmen Sie den Anteil der Teilchen im Kondensat für Temperaturen unterhalb der Übergangstemperatur $T \leq T_c$.