



**Übungen zur Statistischen Mechanik
Wintersemester 2007/08**

Übungsblatt 1, Ausgabe 23.10.2007, abzugeben bis 29.10.2007

Präsenzaufgaben

1. Die Qual der Wahl

Sie wollen aus einer Gruppe von acht Studenten eine Person auswählen. Damit die Wahl auch wirklich zufällig ist, wollen Sie dafür eine Münze werfen.

- (a) Wie gehen Sie am geschicktesten vor? Wie oft müssen Sie die Münze mindestens werfen?
- (b) Was geschieht, wenn Sie die Münze sieben Mal werfen und dabei dem Ereignis *Kopf* den Wert Null zumessen und dem Ereignis *Zahl* den Wert Eins. Addieren Sie nun die Werte zusammen, bekommen Sie eine Zahl zwischen Null und Sieben. Diese Methode ist zwar umständlich, aber ist sie wenigstens fair?
- (c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht diese Methode die Zahl Drei oder Vier? Leiten Sie die Formel für die Wahrscheinlichkeitsverteilung her:

$$W_N(m) = \frac{N!}{m!(N-m)!} \left(\frac{1}{2}\right)^N.$$

Das ist ein Spezialfall der *Binomialverteilung*.

- (d) Goldfischen hat man lange Zeit nachgesagt, sie hätten kein Gedächtnis. Die Bewegung eines solchen Fisches könnte ebenfalls mit einer Münze simuliert werden. In diesem einfachen Modell schwimmt der Goldfisch jeweils eine Strecke der Länge a zufällig nach links oder rechts. Dort angekommen vergisst er sofort, woher er gekommen ist und entscheidet erneut zufällig. Dieses Verhalten wird auch als *eindimensionaler Random Walk* bezeichnet. Wie sieht die Wahrscheinlichkeit aus, den Fisch an einem bestimmten Ort pa zu finden, wobei $p = -N, \dots, N$ ist? Machen Sie sich klar, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung formal folgendermaßen aussieht:

$$W_N(p) = \frac{N!}{\left(\frac{N+p}{2}\right)! \left(\frac{N-p}{2}\right)!} \left(\frac{1}{2}\right)^N.$$

- (e) Wie weit kommt der Fisch im Mittel?
- (f) Betrachten Sie den Grenzfall $N \gg p \gg 1$ und leiten Sie die *Gaussverteilung*

$$W_N(p) = W_0 \exp\left(-\frac{p^2}{2N}\right)$$

aus der Binomialverteilung ab, indem Sie eine Taylorentwicklung erster Ordnung um p nutzen.

2. Maxwell Boltzmann Verteilung

Die *Maxwell-Boltzmann-Verteilung* spiegelt die Verteilung der Geschwindigkeiten im thermischen Gleichgewicht wider:

$$W_{MB}(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k_b T} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(\frac{-m\mathbf{v}^2}{2k_b T} \right).$$

Beachten Sie dabei, dass \mathbf{v} ein Vektor ist und die Wahrscheinlichkeitsdichte W_{MB} auf Eins normiert ist, also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{MB}(\mathbf{v}) dv_x dv_y dv_z = 1.$$

- (a) Bestimmen Sie $\langle v_x \rangle$. Vergegenwärtigen Sie sich, welche Wahrscheinlichkeitsdichte Ihnen Auskunft gibt auf die Frage, wieviele Teilchen eine Geschwindigkeit haben, deren Betrag im Bereich $[v, v + dv]$ liegt. Beachten Sie dabei, dass $v = |\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$ ist. Bestimmen Sie nun $\langle |\mathbf{v}| \rangle$. Dazu könnte Ihnen folgendes Integral von Nutzen sein:

$$\int_0^{\infty} dx x^3 \exp(-ax^2) = \frac{1}{2a^2}.$$

- (b) Bestimmen Sie die *wahrscheinlichste* Geschwindigkeit \check{v} und daraus die *wahrscheinlichste* Energie. Vergleichen Sie diese mit $\langle E \rangle$, wobei $E = m\mathbf{v}^2/2$. Wie erklären Sie sich das Ergebnis? *Hinweis:*

$$\int_0^{\infty} dx x^4 \exp(-ax^2) = \frac{3\sqrt{\pi}}{8a^{\frac{5}{2}}}, \quad \int_0^{\infty} dx x^3/2 \exp(-ax) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4a^{\frac{5}{2}}}.$$

- (c) Kommentieren Sie die physikalische Bedeutung der berechneten Mittelwerte.

schriftlich

3. Korrelationen (3 Punkte)

N Zufallsvariablen ξ_i und ihre gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte $P_N(x_1, \dots, x_N)$ seien gegeben; ihre Mittelwerte seien $\bar{\xi}_i$. Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Matrix von Korrelationen K_{ij} :

- (a) Für beliebige reellwertige N -dimensionale Vektoren \mathbf{a} gilt

$$0 \leq \sum_{i,j=1}^N a_i K_{ij} a_j$$

Hinweis: Verwenden Sie die Hilfsvariable $A = \sum_{i=1}^N a_i (\xi_i - \bar{\xi}_i)$

- (b) Zeigen Sie, dass Kreuzkorrelationen kleiner sind als Autokorrelationen. Dass also für zwei Indizes $i \neq j$ gilt

$$|K_{ij}| \leq \frac{1}{2} (K_{ii} + K_{jj})$$

Hinweis: Wählen Sie die Komponenten von \mathbf{a} geschickt.

- (c) Zeigen Sie, dass die Kreuzkorrelation K_{ij} zweier unabhängiger Zufallsvariablen ξ_i und ξ_j verschwindet. Gilt die Umkehrung?

4. Gauß-Verteilung (6 Punkte)

Zwei Zufallsvariablen ξ und η , die Werte x und y annehmen können, sollen die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte $P_2(x, y)$ besitzen; zur Vereinfachung gelte für die Mittelwerte $\langle \xi \rangle = 0 = \langle \eta \rangle$.

- (a) Wie lautet allgemein die Wahrscheinlichkeitsdichte $P'_2(x', y')$ bei einer Drehung des Koordinatensystems, wenn also:

$$\xi' = \cos \alpha \xi + \sin \alpha \eta, \quad \eta' = -\sin \alpha \xi + \cos \alpha \eta$$

Hinweis: Das Ergebnis lautet $P'_2(x', y') = P_2(\cos \alpha x' - \sin \alpha y', \sin \alpha x' + \cos \alpha y')$.

- (b*) Zeigen Sie, dass die Annahmen, (i) ξ und η seien unabhängig, und (ii) es gebe (mindestens) einen Winkel $\alpha \neq 0$, $n\frac{\pi}{2}$ (mit n einer ganzen Zahl), so dass auch ξ' und η' unabhängig sind, dazu führt, dass $P_2(x, y) = P^G(x) P^G(y)$ gilt, wobei $P^G(x)$ die (eindimensionale) Gaußverteilung sein muss.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $P_\xi(x)P_\eta(y) = P_{\xi'}(x')P_{\eta'}(y')$ durch $P_\alpha(a) = e^{\phi_\alpha(a)}$ gelöst wird, und danach (durch zweimaliges Differenzieren nach x' und y'), dass die $\phi_\alpha(a)$ quadratische Polynome sein müssen.

- (c) Zeigen Sie, dass die Summe $\Xi = \xi + \eta$ zweier unabhängiger, Gauß-verteilter Zufallsvariablen ξ und η auch eine Gauß-Verteilung besitzt.

Hinweis: Die Verwendung charakteristischer Funktionen vereinfacht die Rechnung.

5. Tschebyschew Ungleichung (4 Punkte)

Eine Zufallsvariable ξ und ihre Wahrscheinlichkeitsdichte $P(x)$ seien gegeben; der Mittelwert sei $\bar{\xi}$, die Varianz σ^2 .

- (a) Zeigen Sie, dass oBdA $\bar{\xi} = 0$ und $\sigma^2 = 1$ angenommen werden kann.

Hinweis: Verwenden Sie eine lineare Variablentransformation um das Gewünschte zu erzielen.

- (b*) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ξ einen Wert x annimmt, der sich um mehr als $m\sigma$, d.h. um mehr als m Standardabweichungen mit m einer Konstanten, vom Mittelwert unterscheidet, kleiner ist als $1/m^2$.

Hinweis: Stellen Sie die gewünschte Wahrscheinlichkeit als Integral über $P(x)$ dar.

Betrachten Sie dann die Definition von σ^2 , um die Ungleichung zu beweisen. Sie dürfen nur die Definitionseigenschaften von $P(x)$ benutzen.

6. Poisson Verteilung (4 Punkte)

N Moleküle eines Gases seien in einem Behälter mit Volumen V . Ein kleines Teilvolumen v werde betrachtet, welches n Moleküle enthält. Wie lautet im Grenzfall, dass ein großes System ($N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$) mit konstanter Dichte $\rho = N/V = \text{konst.}$ betrachtet wird, die Wahrscheinlichkeit $p(n)$ dafür, n Moleküle in v zu finden, wenn die Moleküle unabhängig voneinander verteilt sind? Wie lauten Mittelwert und Varianz?

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $p(n)$ einer Binomialverteilung folgt

$$p(n) = \binom{N}{n} q^n (1-q)^{N-n}$$

und führen Sie dann den Grenzprozess durch.