UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Matthias Fuchs
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Statistischen Mechanik
Wintersemester 2005/06

Übungsblatt 4, Ausgabe 15.11.2005, abzugeben bis 21.11.2005
Besprechung in der Zentralübung am 21.11.2005.

Präsenzaufgaben

21. **Klassisches ideales Gas im kanonischen Ensemble**
Gegeben sei ein System von N wechselwirkungsfreien identischen Punktteilchen in einem Volumen V. Sein Hamilton-Operator lautet

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m}.$$

a) Berechnen Sie die Zustandssumme Z des Systems in der kanonischen Gesamtheit unter der Annahme der Ununterscheidbarkeit der Teilchen und drücken Sie das Ergebnis mit Hilfe der thermischen Wellenlänge

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2\beta}{m}}$$

aus.
Hinweise:

$$\int_0^\infty dx\; x^2 e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{16\,\alpha^3}}$$

$$N! \approx N^N\, e^{-N}\sqrt{2\pi N} \approx N^N\, e^{-N} = e^{N\,ln\frac{N}{e}}$$

Weswegen kann letztere Vereinfachung gemacht werden?

b) Diskutieren Sie klassisches und quantenmechanisches Regime anhand des Vergleichs der thermischen Wellenlänge mit dem mittleren Teilchenabstand im System.

c) Die thermische Wellenlänge λ entspricht einer de Broglie-Wellenlänge. Berechnen Sie den zugehörigen Impuls p_{th} und die Energie E_{th}.

d) Bestimmen Sie die mittlere Energie $\langle E \rangle$ des Gases und verifizieren Sie den Gleichverteilungssatz für die Energie.

e) Berechnen Sie den Druck P und leiten Sie die Zustandsgleichung des Gases her.

f) Berechnen Sie das chemische Potential $\beta\mu = -\frac{\partial}{\partial N} lnZ$.

g) Bestimmen Sie die Entropie und erklären Sie, welches Vorzeichen der Ausdruck für S haben kann. Was geht u. Umständen schief?
Leiten Sie unter der Annahme konstanter Entropie die Adiabatengleichung

$$pV^\kappa = const$$

ab.

22. **Erwartungswerte für den HO im klassischen und quantenmechanischer Grenzfall**

   a) Der Erwartungswert $\langle \hat{x}^2 \rangle$ soll für den quantenmechanischen Harmonischen Oszillator

      i. mit Hilfe des Virialsatzes und dem Ergebnis für die Gesamtenergie aus Aufgabe 15

      ii. über die Definition des Ortsoperators mit $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$

      berechnet werden. Geben Sie das Ergebnis im Falle hoher und niedriger Temperaturen an.

   b) Wie lautet das Ergebnis nach dem Gleichverteilungssatz im klassischen Fall?

schriftlich

23. **Ideales Gas im relativistischen Grenzfall (4 Punkte)**
   Bewegen sich die N Teilchen eines idealen Gases im Volumen V mit (ultra–) relativistischen Geschwindigkeiten, so lautet die Hamiltonfunktion des i–ten Teilchens:

$$E_i = c|\mathbf{p}_i|$$

   a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z, indem Sie im Phasenraum über alle Positions– und Impulsfreiheitsgrade integrieren.

   b) Bestimmen Sie den Druck als Funktion der Energiedichte $\langle E \rangle / V$ und die Zustandsgleichung $P = P(V/N, T)$.

24. **Oberfläche der d–dimensionalen Kugel (4 Punkte)**
   Für einige Betrachtungen in der Statistischen Mechanik wird die Oberfläche einer d–dimensionalen Kugel benötigt.

   a) Berechnen Sie das d–dimensionale Gauss'sche Integral durch Rückführung auf unabhängige eindimensionale Integrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dp_d \, \exp(-(p_1^2 + \cdots p_d^2)).$$

   b) Drücken Sie obiges Integral in Polarkoordinaten aus und führen Sie die radiale Integration durch. Zeigen Sie hiermit, ohne die Winkelintegrale auszuführen, dass gilt:

$$\int d^d p \, \delta(1 - |\mathbf{p}|) = \int d\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)},$$

   wobei $\Gamma(x)$ die Gamma–Funktion und $d\Omega_d$ das d–dimensionale Oberflächenelement ist. Verifizieren Sie Ihre Ergebnisse für $d = 1, 2$ und 3.

25. **Stirlingsche Formel (4 Punkte)**
   Die Stirlingsche Formel gibt eine Näherung von $x!$ für grosse Werte von x.

   a) Zeigen Sie die Darstellung der Gamma–Funktion als Integral

$$x! = \int_0^{\infty} dt \, t^x e^{-t} = \int_0^{\infty} dt \, \exp(x \ln(t) - t).$$

   Skizzieren Sie die Funktionen $f(t; x) = x \ln(t) - t$ und $\exp(f(t; x))$ gegen t für ansteigende Werte von x. Was fällt Ihnen auf?

   b) Für welchen Wert von t nimmt der Integrand sein Maximum an? Entwickeln Sie $f(t; x)$ als Taylorreihe um diesen Punkt, um die folgende Näherung für den Integranden zu finden:

$$e^{f(t;x)} \sim e^{x \ln(x) - x} e^{-u^2/(2x)} e^{u^3/(3x^3) - u^4/(4x^3)},$$

wobei $u = t - x$. Entwickeln Sie die dritte Exponentialfunktion in eine Taylorreihe um $u = 0$ und leiten Sie somit die ersten zwei Terme in der Stirlingschen Formel ab:

$$x! \sim \sqrt{2\pi} x^x e^{-x} \left(1 + \frac{1}{12x}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Das Ergebnis ist ein Beispiel für eine asymptotische Formel, welche hier durch die 'Sattelpunktsmethode' ('method of steepest descents') bestimmt wurde.

26. **Zustandssumme des eindimensionalen Ising Modells (4 Punkte)**
Das Ising–Modell ist eines der bekanntesten Modelle der Statistischen Mechanik, da es (in Speziallfällen) lösbar ist und in höheren Dimensionen zu Phasenübergängen führt. Es soll die eindimensionale Version ohne angelegtem Magnetfeld studiert werden, die durch den Ausdruck für die 'Ising'–Energie festgelegt ist:

$$H = -J \sum_{i=1}^{N-1} S_i S_{i+1},$$

wobei $J > 0$. Die Variablen S_i können hier als klassische Variablen betrachten werden, die (nur) die Werte $S_i = \pm 1$ annehmen können. H beschreibt eine Kette von Spins (mit zur Vereinfachung freien Randbedingungen).

a) Die kanonische Zustandssumme ist gegeben durch:

$$Z = \sum_{S_1 = \pm 1} \cdots \sum_{S_N = \pm 1} e^{-\beta H}.$$

und enthält die Kopplung eines Spins i an seinen Nachbarn $i + 1$. Definieren Sie die Variablen $\eta_i = S_i S_{i+1}$, um Z durch Auswertung von unabhängigen Summationen zu bestimmen. Welche Werte können die η_i annehmen? Welches Set von neuen Variablen erlaubt es Ihnen alle Zustände des Systems zu charakterisieren? Wie lautet der Zusammenhang zwischen neuen und alten Variablen? Begründen Sie, wie durch Summierung über alle η_i die ursprüngliche Summe für Z bestimmt werden kann.

b) Skizieren Sie $\ln(Z)$ als Funktion von βJ und vergleichen Sie mit dem Ergebnis von Aufgabe 17 (ohne Magnetfeld $\mathbf{B} = 0$).