UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Matthias Fuchs
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Statistischen Mechanik
Wintersemester 2005/06

Übungsblatt 12, Ausgabe 24.01.2006, abzugeben bis 31.01.2006
Besprechung in der Zentralübung am 31.01.2006.

Präsenzaufgaben

66. **Der Weiße Zwerg**

Sterne mit einer anfänglichen Masse $M \leq 8M_\odot$, die nach dem Masseverlust als Roter Riese oder Überriese nicht mehr als ca. $1.4M_\odot$ beträgt, beenden die Phase des Wasserstoff- und Heliumbrennens als Weiße Zwerge mit C_{12}/O_{16}-Kern. In dieser stabilen Konfiguration hält der Quantendruck eines entarteten Elektronengases der Gravitation die Waage.

(a) Verifizieren Sie zunächst, dass sich der Weiße Zwerg als vollständig entartetes Elektronengas beschreiben läßt. Berechnen Sie hierzu

i. die Elektronendichte unter der Annahme, dass der Weiße Zwerg aus einer Mischung aus Elektronen und He_4^{++}-Ionen (nur das Verhältnis der Massen zur Ladung e^-/u ist entscheidend) besteht und

ii. das chemische Potential μ_0 bei $T = 0$ als Funktion der Elektronendichte.
Vergleichen Sie die Fermi-Temperatur T_F des Systems mit der mittleren Temperatur T_c im Inneren eines Weißen Zwerges.

Einige Zahlenangaben:
Masse $M = 2.0 \cdot 10^{30}$kg, atomare Masseneinheit $u = 1.66 \cdot 10^{-27}$kg, Temperatur im Zentrum $T_c = 10^7$K, Radius $R = 5 \cdot 10^6$m

(b) Geben Sie im Falle $T \neq 0$ einen allgemeinen Ausdruck für das Großkanonische Potential und den Druck in integraler Form an.

(c) Berechnen Sie den Ausdruck aus Teilaufgabe b) näherungsweise für $T = 0$ im Falle relativistischer Elektronen.
Hinweis: Führen Sie die Hilfsvariable $x = p/mc$ ein und entwickeln Sie den Integranden für $x \ll 1$ und $x \gg 1$ bis zur $\mathrm{O}(x^2)$. Welche Grenzfälle werden hierdurch beschrieben?

(d) Im Weißen Zwerg kompensiert der Quantendruck des Elektronengases den Gravitationsdruck, der sich wie

$$P_G \simeq -\frac{G}{4\pi}\frac{M^2}{R^4}$$

verhält. Machen Sie sich diesen Ausdruck plausibel, indem Sie die Änderung der Gravitationsenergie $E_G \simeq -GM^2/R$ einer Kugelschale mit einer Volumenarbeit gleichsetzen. Der Einfachheit halber kann von einer homogenen Dichteverteilung ausgegangen werden.

i. Formen Sie das Ergebnis aus c) für $x \gg 1$ um, so dass es statt vom Fermi-Impuls p_F bzw. ε_F oder der Elektronendichte nun von der Masse M und dem Radius R abhängt.

ii. Lösen Sie die Gleichgewichtsbedingung nach R auf.

Welchen erstaunlichen Zusammenhang erhalten Sie für $R(M)$?
Welchen Wert erhalten Sie für die *Chandrasekhar*-Grenzmasse?

67. **Kompressibilität von Quantengasen**
Die Kompressibilitäten von Gasen wechselwirkungsfreier Bosonen, klassischer Teilchen und Fermionen unterscheiden sich und dies eröffnet eine Möglichkeit, die Quantenstatistik direkt zu beobachten.

(a) Zeigen Sie, dass für ihre jeweiligen isothermen Kompressibilitäten im thermodynamischen Limes bei $T \neq 0$

$$|\kappa_B| > |\kappa_{kl}| > |\kappa_F|$$

gilt. Die isotherme Kompressibilität ist gegeben durch

$$\kappa = \frac{1}{n\,N}\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T .$$

(b) Beweisen Sie, dass ganz allgemein

$$\kappa = \frac{1}{n k_B T}\frac{\langle(\Delta N)^2\rangle}{N},$$

d.h. mit den Fluktuationen zusammenhängt.

schriftlich

68. **Halbleitermodell (4 Punkte)**
In dieser Aufgabe soll ein einfaches Halbleitermodell betrachtet werden, in dem die Elektronen als ideales Fermi-Gas behandelt werden. Abb.1 zeigt das Schema des Systems. Sowohl die Fermi-Energie ϵ_F als auch $\epsilon - \epsilon_F$ seien groß gegenüber der thermischen Energie $k_B T$.

(a) Zeigen Sie, dass die mittleren Elektronendichten gegeben sind durch

$$n_s = \frac{2\rho_s}{e^{-\beta(\epsilon-\epsilon_F)}+1}; \quad n_c = \frac{2}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\mathbf{k}}+\epsilon_F)}+1},$$

wobei $\epsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2/2m$. Der erste Ausdruck gibt die Elektronen der Gitterplätze wider, der Zweite die aus dem Leitungsband.

(b) Benutzen Sie die gegebenen Ungleichungen $\beta\epsilon_F \gg 1$ und $\beta(\epsilon - \epsilon_F) \gg 1$ um folgende Beziehung zu zeigen

$$p n_c = \frac{4\rho_s}{\lambda^3} e^{-\beta\epsilon},$$

mit λ der thermischen Wellenlänge, p der mittleren Dichte der unbesetzten Gitterplätze und n_c der Elektronendichte im Leitungsband. *Hinweis:* Diese Beziehung ist das Massenwirkungsgesetz für Halbleiter, wobei die rechte Seite eine Art Gleichgewichtskonstante ist.

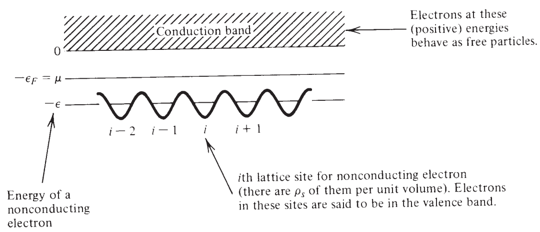

Fig. 4.5. Model for semiconductors.

69. **Paarkorrelationen im idealen Fermi-Gas (6 Punkte)**
In einem klassischen Gas von idealen Teilchen ist die radiale Paarverteilungsfunktion $g(r) = 1$ für alle Abstände r der Teilchen. Dies ist jedoch nicht der Fall für ein ideales Gas von Fermionen. Das Paulische Ausschlussprinzip verhindert, dass sich zwei Teilchen mit den selben Quantenzahlen (z.B. Spin) am selben Raumpunkt befinden. Dies sorgt für eine zusätzliche Struktur von $g(r)$.

(a) Eine Folge des Paulischen Ausschlussprinzips ist, dass die N-Teilchen Wellenfunktion des Elektronengases antisymmetrisch ist. Die einfachste Art solch eine Wellenfunktion aus Einteilchenwellenfunktion zusammenzusetzen ist mit Hilfe der *Slater Determinante*

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} u_1(\mathbf{r}_1) & u_2(\mathbf{r}_1) & \cdots \\ u_1(\mathbf{r}_2) & u_2(\mathbf{r}_2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{vmatrix}, \tag{1}$$

Wieso ist diese Darstellung offensichtlich antisymmetrisch, und wieso gibt der Vorfaktor $1/\sqrt{N!}$ die richtige Normierung?

(b) Benutzen Sie die Vielteilchenwellenfunktion um den Erwartungswert der Energie $\langle\phi\,|\sum_{i,j} V(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)|\phi\rangle$ zu berechnen. Dabei ist $V(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ das Wechselwirkungspotential zwischen den Teilchen i und j. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem allgemeinen Ausdruck für die mittlere Energie

$$\int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 g_2(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2) V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$

um Folgendes zu zeigen:

$$g_2(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2) = \sum_{i,j} \left[|u_i(\mathbf{r}_1)|^2 |u_j(\mathbf{r}_2)|^2 - (u_i^*(\mathbf{r}_1) u_j(\mathbf{r}_1))(u_j^*(\mathbf{r}_2) u_i(\mathbf{r}_2)) \right].$$

(c) Für den Fall ohne Wechselwirkungspotential $V(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = 0$ kann man den ebenen Wellen Ansatz für die Einteilchenwellenfunktionen benutzen $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}/\sqrt{V}$. Benutzen Sie den Kontinuumslimes und zeigen Sie dass

$$n^2 g_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{k}' \left(1 - e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}\right) f(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}').$$

Wieso muss dabei die Fermifunktion $f(\mathbf{k})$ berücksichtigt werden?

(d) Für ein ideals Fermi-Gas bei $T = 0$ gilt $f_{\mathbf{k}}^0 = \Theta(k_F - k)$, mit $\mathbf{k}_F$ dem Fermi Wellenvektor. Zeigen Sie, dass für $T = 0$ die radiale Verteilungsfunktion $g(r) \equiv g_2(r, 0)$ gegeben ist durch

$$g(r) = 1 - \left(\frac{3 j_1(k_F r)}{k_F r}\right)^2,$$

wobei die sphärische Besselfunktion $j_1(x) = (\sin(x) - x\cos(x))/x^2$ und $n = \frac{k_F^3}{6\pi^2}$. Skizzieren Sie $g(r)$ und diskutieren Sie die Lage des ersten Maximums. Das berechnete $g(r)$ ist gültig für polarisierte Elektronen (alle mit der selben Spineinstellung). Wie verhält sich $g(r)$ im unpolarisierten Fall?

70. **Bose-Gas in harmonischer Falle (6 Punkte)**
Mit Hilfe von Lasern lassen sich bestimmte Gase, die in optischen Fallen eingesperrt sind, auf sehr tiefe Temperaturen abkühlen. Mitte der 90er Jahre gelang sowohl E. Cornell und C. Wieman als auch W. Ketterle mit dieser Technik die Herstellung eines sogenannten Bose-Einstein Kondensats. Für diese Arbeit erhielten Sie 2001 gemeinsam den Nobelpreis in Physik. In dieser Aufgabe soll ein vereinfachtes Modell dieses Effekts betrachtet werden.

(a) Die großkanonische Zustandssumme von nichtwechselwirkenden Bosonen ist gegeben durch

$$\beta Z = \sum_{\mathbf{n}} \ln(1 - ze^{-\beta\epsilon_{\mathbf{n}}}),$$

wobei die Energieeigenwerte der einzelnen Teilchen $\epsilon_{\mathbf{n}} = \hbar\omega(n_x + n_y + n_z)$ und $z = \exp\beta\mu$ die Fugazität. Finden Sie eine Beziehung zwischen der Teilchenzahl N und der Fugazität z.

(b) Teilen Sie die Zustandssumme in einen Anteil für den Grundzustand und für den Rest auf. Der Restterm kann als Integral ausgedrückt werden.

(c) Bestimmen Sie den Wert von z bei dem die Kondensation stattfindet und zeigen Sie, dass die kritische Temperatur für den Übergang gegeben ist durch

$$k_B T_c = \hbar\omega \left(\frac{N}{g(1)}\right)^{1/3} \gg \hbar\omega,$$

mit $g(z) = \sum_{j=1}^{\infty} z^j/j^3$.

(d) Bestimmen Sie den Anteil der Teilchen im Kondensat für Temperaturen unterhalb der Übergangstemperatur $T \leq T_c$.