UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Matthias Fuchs
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Statistischen Mechanik
Wintersemester 2005/06

Übungsblatt 11, Ausgabe 17.01.2006, abzugeben bis 23.01.2006
Besprechung in der Zentralübung am 23.01.2006.

Präsenzaufgaben

60. **Eulersche Homogenitätsrelation**
Eine Funktion $f(x_1, \ldots, x_k)$ heißt homogen vom Grade α falls gilt:

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_k) = \lambda^\alpha f(x_1, \ldots, x_k)$$

a) Zeigen Sie folgende Beziehung, indem Sie nach einer geeigneten Größe ableiten und eine spezielle Wahl für diese treffen.

$$\alpha f(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i=1}^{k} x_i \left(\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_i} \right)_{x_{j \neq i} \text{ konst.}} .$$

b) In der Thermodynamik spielen intensive und extensive Größen eine wichtige Rolle. Diese haben den Homogenitätsgrad Null bzw. Eins.
Die innere Energie E ist eine extensive Funktion der extensiven Größen Entropie S, Volumen V und Teilchenzahl N_i der Spezies $i = 1, \ldots, r$ (Gesamtteilchenzahl $N = \sum_{i=1}^{r} N_i$). Benutzen Sie die Extensivität der inneren Energie, um die Gibbs-Duhem Beziehung zu zeigen:

$$SdT - Vdp + \sum_{i=1}^{r} N_i d\mu_i = 0$$

c) Thermodynamische Variablen, wie Druck p, Temperatur T und chemisches Potential μ_i sind intensive Größen, d.h. vom Grad Null. Durch eine geeignete Wahl von λ kann man zeigen, dass diese nur von $r + 1$ intensiven Variablen abhängen. Von wie vielen extensiven Variablen sind im Vergleich dazu die extensiven Funktionen abhängig?

61. **Pauli Paramagnetismus**
Betrachten Sie ein System nicht wechselwirkender Elektronen in einem äußeren Magnetfeld $\mathbf{B}$. Die Energie eines Elektrons hängt vom kontinuierlichen Wellenvektor $\mathbf{k}$ und dem diskreten Spinparameter $\sigma = \pm 1$ ab:

$$\epsilon_{\mathbf{k},\sigma} = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} + \sigma \mu_B B$$

Die Energie des Gesamtzustandes ν ist gegeben durch $E_\nu = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \epsilon_{\mathbf{k},\sigma} n_{\mathbf{k},\sigma}^{(\nu)}$ wobei die Gesamtteilchenzahl $N_\nu = \sum_{\mathbf{k},\sigma} n_{\mathbf{k},\sigma}^{(\nu)}$. Da Elektronen Fermionen sind gilt $n_{\mathbf{k},\sigma} = 0, 1$.
Bestimmen Sie die großkanonische Zustandssumme dieses Systems:

$$Z_G = \sum_{\nu} \exp\left[-\beta \left(E_\nu - \mu N_\nu\right)\right]$$

bzw. den Logarithmus davon

$$\ln Z_G = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \ln \Big(1 + \exp\left[-\beta(\epsilon_{\mathbf{k},\sigma} - \mu)\right] \Big)$$

Die Summation über den Wellenvektor wird sinnvollerweise als Integration ausgeführt. Machen Sie sich anhand der möglichen Wellenvektoren einer Welle in einem Würfel der Kantenlänge L (periodische Randbedingungen) klar, wie das Normierungsvolumen beim Übergang zur Integration lauten muß. Schreiben Sie das Integral über den Wellenvektor um in eine Integration über die Energie für eine bestimmte Spineinstellung (z.B. $\sigma = +1$). Die Vorfaktoren entsprechen der Zustandsdichte $D(\epsilon)$:

$$\sum_{\mathbf{k}} \longrightarrow \int d\epsilon D(\epsilon)$$

Wie wirkt sich also der Spin im Magnetfeld auf die Zustandsdichte aus?

schriftlich

62. **Thermische Koeffizienten (4 Punkte)**

   a) Zeigen Sie, dass der Druckkoeffizient β, der thermische Ausdehnungskoeffizient α und die isotherme Kompressibilität κ_T zusammenhängen durch die Beziehung $\beta = \alpha/\kappa_T$. α, β und κ sind definiert durch

   $$\alpha = \frac{1}{V}\frac{\partial V(T,p)}{\partial T} \quad , \quad \beta = \frac{\partial p(T,V)}{\partial T} \quad , \quad \kappa_T = -\frac{1}{V}\frac{\partial V(T,p)}{\partial p}.$$

   b) Geben Sie α, β und κ_T für das ideale Gas an.

   c) Zeigen Sie, dass $C_p = T\frac{\partial S(T,p)}{\partial T}$ und $C_V = T\frac{\partial S(T,V)}{\partial T}$ die folgende Beziehung erfüllt

   $$\sigma = \frac{\partial S(T,p)}{\partial T} - \frac{\partial S(T,V)}{\partial T} = V\alpha\beta.$$

   d) Berechnen Sie σ für ideale Gase.

63. **Rotonen (6 Punkte)**

   In suprafluidem ^{4}He besitzen die kollektiven Dichteflukutationen eine Dispersionsrelation $\omega_{\mathbf{k}}$ mit einem Minimum bei Wellenvektor $\mathbf{k}_0$. Um $\mathbf{k}_0$ verhalten sich elementare Anregungen, Rotonen genannt, näherungsweise wie nicht-wechselwirkende Bosonen. Die Dispersionsrelation ist in diesem Fall gegeben durch

   $$\hbar\omega_{\mathbf{k}} = \Delta + \frac{\hbar^2(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)^2}{2m^*},$$

   wobei $\Delta > 0$ und $m^* > 0$.

   a) Benutzen Sie den effektiven Hamiltonoperator

   $$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} \quad , \quad n_{\mathbf{k}} = 0, 1, \ldots$$

   um die mittlere Anzahl an Rotonen $N_{\text{rot}} = \sum_{\mathbf{k}} \bar{n}_{\mathbf{k}}$ in führender Ordnung bei tiefen Temperaturen zu bestimmen. Die mittlere Besetzungszahl ist dabei gegeben durch $\bar{n}_{\mathbf{k}} = (\exp(\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}) - 1)^{-1}$.

   b) Argumentieren Sie wieso folgende Näherung $\bar{n}_{\mathbf{k}} \sim \exp(-\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}})$ gültig ist für tiefe Temperaturen.

   c) Bestimmen Sie die mittlere Energie $E = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}}\bar{n}_{\mathbf{k}}$ und berechnen Sie den Rotonenanteil an der spezifischen Wärme.

64. **Sommerfeld Entwicklung (6 Punkte)**
In dieser Aufgabe betrachten wir eine Entwicklungsmethode, die auf Sommerfeld zurückgeht und oft bei bei der Untersuchung Fermionischer Systeme Anwendung findet. Wir betrachten ein Integral der Form

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon H(\epsilon) f(\epsilon) \quad , \quad f(\epsilon) = \frac{1}{1 + e^{(\epsilon-\mu)/k_B T}}$$

wobei $H(\epsilon)$ gegen Null strebt, wenn $\epsilon \to -\infty$.

a) Indem Sie annehmen, dass $f(\epsilon) \to 0$ sich gegenüber der Divergenz von $K(\epsilon)$ durchsetzt, wenn $\epsilon \to \infty$, zeigen Sie, dass

$$I = -\int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon K(\epsilon) \left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon} \right) \quad , \quad K(\epsilon) = \int_{\infty}^{\epsilon} H(\epsilon') d\epsilon'$$

b) Skizzieren Sie die Funktion $f(\epsilon)$ und deren erste Ableitung für niedrige T. Weshalb ist der hergeleitete Ausdruck in (a) nützlicher um die ursprüngliche Form zu nähern?

c) Entwicklen Sie $K(\epsilon)$ in einer Taylorreihe um $\epsilon = \mu$, um das folgende Ergebnis zu beweisen:

$$I = \int_{-\infty}^{\mu} H(\epsilon) d\epsilon - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \frac{(\epsilon-\mu)^{2n}}{(2n)!} \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \right) \left(\frac{d^{2n-1}}{d\epsilon^{2n-1}} H(\epsilon) \right)_{\epsilon=\mu} .$$

Warum erscheinen nur Glieder mit geraden Potenzen von $(\epsilon - \mu)$?

d) Setzten Sie $(\epsilon - \mu)/k_B T = x$ und zeigen Sie damit

$$I = \int_{-\infty}^{\mu} H(\epsilon) d\epsilon + \sum_{n=1}^{\infty} (k_B T)^{2n} a_n \left(\frac{d^{2n-1}}{d\epsilon^{2n-1}} H(\epsilon) \right)_{\epsilon=\mu} ,$$

wenn a_n folgendermaßen definiert ist:

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^{2n}}{(2n)!} \left(-\frac{d}{dx} \frac{1}{1+e^x} \right) .$$

Dieses Ergebnis wird Sommerfeld Entwicklung genannt.

65. **Pauli Paramagnetismus II (6 Punkte)**
Als Anwendung der Sommerfeldentwicklung bestimmen wir die Suszeptibilität im Pauli Modell des Paramagnetismus. Im Pauli Modell werden freie Elektronen betrachtet, die in einem angelegten Magnetfeld eine Energieverschiebung von $\epsilon_\pm = \epsilon \pm \mu_B B$ erfahren.

a) Die Teilchenzahldichte n ist durch das Integral

$$n = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon D(\epsilon) f(\epsilon),$$

gegeben, wobei $D(\epsilon)$ die Zustandsdichte ist. Benutzen Sie die Sommerfeldentwicklung mit $a_1 = \pi^2/6$ um Folgendes zu zeigen:

$$n = \int_{0}^{\mu} d\epsilon D(\epsilon) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 D'(\mu).$$

D' ist dabei die Ableitung bezüglich ϵ.

b) Benutzen Sie die Definition der Fermi Energie

$$n = \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon D(\epsilon)$$

und die Näherung

$$\int_{\epsilon_F}^{\mu} D(\epsilon) \approx (\mu - \epsilon_F) D(\epsilon_F)$$

um zu zeigen, dass die Temperaturabhängigkeit des chemischen Potentials in führender Ordnung gegeben ist durch

$$\mu = \epsilon_F - \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 \frac{1}{D(\epsilon_F)} \left(\frac{dD}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=\epsilon_F}$$

c) Die Magnetisierungsdichte ist gegeben durch $M = -\mu_B(n_+ - n_-)$, wobei $n_\pm$ die Teilchenzahldichte mit Spin parallel bzw. antiparallel zum äußeren Feld ist. Machen Sie sich graphisch folgende Beziehungen für die Zustandsdichten der $\pm$ Elektronen klar:

$$D_+(\epsilon) = \frac{1}{2} D(\epsilon - \mu_B B) \ , \ D_-(\epsilon) = \frac{1}{2} D(\epsilon + \mu_B B),$$

$\mu_B B$ ist im Allgemeinen sehr klein im Vergleich zu ϵ_F. Machen Sie eine Taylorentwicklung von $D_\pm$ um ϵ um das in erster Ordnung in B korrekte Ergebnis zu zeigen

$$M = \mu_B^2 B \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon D(\epsilon) \left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon} \right).$$

d) Benutzen Sie schließlich die Sommerfeldentwicklung und das Ergebnis für das chemische Potential um zu zeigen, dass die Suszeptibilität $\chi = \frac{\partial M}{\partial H}$ gegeben ist durch

$$\chi = \mu_B^2 \left(D(\epsilon_F) + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 \left(D''(\epsilon) - \frac{D'(\epsilon)^2}{D(\epsilon)} \right)_{\epsilon=\epsilon_F} \right).$$