UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Statistischen Mechanik
Wintersemester 2005/06

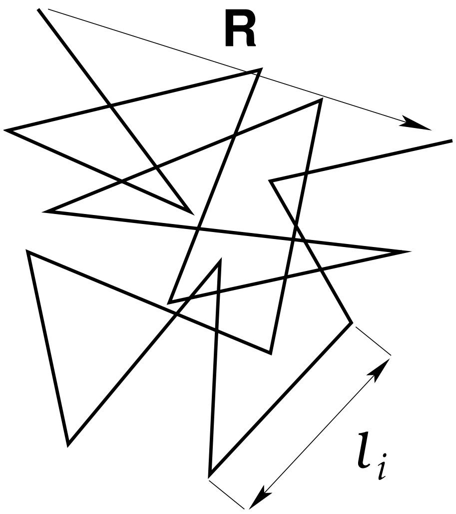
Übungsblatt 0, Ausgabe 18.10.2005, abzugeben bis 24.10.2005
Besprechung in der Zentralübung am 24.10.2005.

1. **Zufallsweg und Polymer (2 Sonderpunkte)**
Ein einfaches Modell eines Kettenpolymers beschreibt dieses als eine Abfolge von N geraden Stücken der Länge l_i, mit $i = 1, \ldots, N$, die frei rotierend aneinander gehängt sind. Berechnen Sie die folgenden Erwartungswerte des End-zu-End Abstandsvektors $\mathbf{R}$

$$\langle \mathbf{R} \rangle = 0$$

$$\langle \mathbf{R} \cdot \mathbf{R} \rangle = N l^2$$

unter der Annahme, dass die Richtung jedes Längenstückes unabhängig ist von allen anderen Richtungen, und dass $l_i = l$ für alle i gilt.



2. **Lagrange Multiplikatoren (2 Sonderpunkte)**
Es werde das Minimum (allgemeiner ein Extremum) der Funktion $V(\mathbf{r})$ gesucht, mit $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$, wobei eine Nebenbedingung $g(\mathbf{r}) = 0$ existiert. Hierzu kann die Methode der "Lagrange Multiplikatoren" verwendet werden.

   a) Erklären Sie, dass an Extremalpositionen $\mathbf{r}_\star$ von $V(\mathbf{r})$ unter der Nebenbedingung $g(\mathbf{r}) = 0$ die folgenden Gleichungen erfüllt sind:

$$\nabla \left(V(\mathbf{r}) + \lambda g(\mathbf{r}) \right)\big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_\star} = 0$$

$$g(\mathbf{r} = \mathbf{r}_\star) = 0$$

Hinweis: Interpretieren Sie $V(\mathbf{r})$ als Potential das auf ein Teilchen wirkt, welches sich nur auf der Fläche gegeben durch $g(\mathbf{r}) = 0$ bewegen kann. In welche Richtung weist die Zwangskraft? (2 Punkte)

b) Verwenden Sie die Methode um den kürzesten Abstand eines Punktes $\mathbf{r}_0$ in der Ebene $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$ von einer Geraden gegeben durch

$$ax + by + c = 0$$

zu bestimmen. Was ist die (graphische) Bedeutung von λ? (2 Punkte)

3. **Maxwell Boltzmann Verteilung (3 Sonderpunkte)**
Der Mittelwert $\langle a \rangle$ der Größe a ist wie folgt definiert:

$$\langle a \rangle = \int a w(a) da$$

wobei $w(a)da$, da die Wahrscheinlichkeit angibt, dass die Größe a einen Wert im Intervall $[a, a + da]$ annimmt.

a) Bestimmen Sie $\langle v_x \rangle, \langle |\mathbf{v}| \rangle, \langle \mathbf{v}^2 \rangle^{1/2}, \langle E \rangle$ mit Hilfe der Maxwell'schen Verteilungsfunktion

$$f_M(\mathbf{v}) = n \cdot \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \cdot \exp\left(-\frac{m\mathbf{v}^2}{2k_B T} \right), \quad n = N/V \quad !$$

Dabei bedeutet $|\mathbf{v}| = v = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2}$. $f_M(\mathbf{v})$ ist so normiert, dass man über $\mathbb{R}^3$ integrieren muss, um die Teilchen pro Volumeneinheit in einem bestimmten Geschwindigkeitsintervall

$$\begin{bmatrix} v_x, & v_x + dv_x \\ v_y, & v_y + dv_y \\ v_z, & v_z + dv_z \end{bmatrix}$$

zu erhalten.
Also $dn = f_M(\mathbf{v}) dv_x dv_y dv_z \;\; ; \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dn = n.$
Überlegen Sie für jeden der zu bestimmenden Mittelwerte zunächst, wie die Wahrscheinlichkeit lautet, dass ein Teilchen im jeweiligen Geschwindigkeitsintervall liegt. (1,5 Punkte)

b) Wie groß ist die (betragsmäßig) wahrscheinlichste Geschwindigkeit $\tilde{v}$? (0,5 Punkte)

c) Welche physikalische Bedeutung haben $\langle v_x \rangle, \langle |\mathbf{v}| \rangle, \langle \mathbf{v}^2 \rangle^{1/2}, \langle \tilde{v} \rangle$? (0,5 Punkte)

d) Ist die wahrscheinlichste Energie $\tilde{E}$ gleich $\frac{1}{2} m \tilde{v}^2$? Warum nicht? (0,5 Punkte)

Hinweis: $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt; \quad \Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x); \quad \Gamma(n) = (n-1)!; \quad \Gamma(1/2) = \pi^{1/2}$ mit $x \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}$ oder nehmen Sie Bronstein zu Hilfe!

4. **Poisson Verteilung (4 Sonderpunkte)**
N Moleküle eines Gases seien in einem Behälter mit Volumen V. Ein kleines Teilvolumen v werde betrachtet, welches n Moleküle enthält. Wie lautet im Grenzfall, dass ein großes System ($N \to \infty$, $V \to \infty$) mit konstanter Dichte $\rho = N/V = konst.$ betrachtet wird, die Wahrscheinlichkeit $p(n)$ dafür, n Moleküle in v zu finden, wenn die Moleküle unabhängig voneinander verteilt sind? Wie lauten Mittelwert und Varianz?
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $p(n)$ einer Binomialverteilung folgt

$$p(n) = \left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array} \right) q^n (1-q)^{N-n}$$

und führen Sie dann den Grenzprozess durch.