Lichtstreuung

Seminar zu Weiche Materie
WS 2007/2008

Bernhard Mayer

Fachbereich Physik
Universität Konstanz

14. Dezember 2007

Inhaltsverzeichnis

Schematischer Aufbau eines Streuexperiments

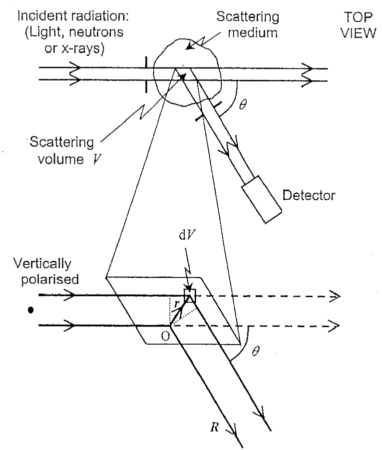


Abb. aus Linder, Zemb: *Neutrons, X-Rays and Light*

- Bereich der Probe, der sowohl vom Laser beleuchtet, als auch vom Detektor "gesehen" wird, ist das Streuvolumen
- Winkel θ ist der Streuwinkel

Einführung

- Streuung wird verursacht durch Fluktuationen im Medium
- Fluktuationen hängen mit Schwankungen der Dichte oder Temperatur des Streumaterials zusammen
  $\Rightarrow$ Kolloides Teilchen streut Licht, wenn sich Brechungsindex von dem der Flüssigkeit, in der es gelöst ist, unterscheidet
- Statische Lichtstreuung
  Messung der Winkelabhängigkeit der durchschnittlich gestreuten Intensität
- Dynamische Lichtstreuung
  Messung der Zeitabhängigkeit der Fluktuationen im gestreuten Licht

Grundlegende Theorie der Lichtstreuung

- Suspension wird als Medium ohne freie Ladungen und Ströme angenommen
- Berechnung folgt aus MAXWELL-Gleichungen

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0 \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \tag{2}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} = i\omega\mathbf{B} \tag{3}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \dot{\mathbf{D}} = -i\omega\mathbf{D} \tag{4}$$

- Betrachten nicht-magnetisches System:
  $\mu_r = 1 \Rightarrow \mathbf{B} = \mu_0\,\mathbf{H}$
- Zusammenhang zwischen diel. Verschiebung und el. Feld:
  $\mathbf{D} = \epsilon_r\epsilon_0\,\mathbf{E}$

Grundlegende Theorie der Lichtstreuung

- ϵ_r ist zeit- und ortsabhängig

$$\underline{\underline{\epsilon_r}}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_{ro}\mathbb{1} + \delta\underline{\underline{\epsilon_r}}(\mathbf{r}, t) \tag{5}$$

Grundlegende Theorie der Lichtstreuung

- ϵ_r ist zeit- und ortsabhängig

$$\underline{\underline{\epsilon_r}}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_{ro}\mathbb{1} + \delta\underline{\underline{\epsilon_r}}(\mathbf{r}, t) \tag{5}$$

- Zerlegen Felder in einfallenden und gestreuten Anteil
- Gesamte diel. Verschiebung ergibt sich zu:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_i + \mathbf{D}_s = \epsilon_0 \left(\epsilon_{r0}\mathbb{1} + \delta\underline{\underline{\epsilon_r}}(\mathbf{r}, t)\right)(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s)$$

Grundlegende Theorie der Lichtstreuung

- ϵ_r ist zeit- und ortsabhängig

$$\underline{\underline{\epsilon_r}}(\mathbf{r}, t) \;=\; \epsilon_{ro}\mathbb{1} + \delta\underline{\underline{\epsilon_r}}(\mathbf{r}, t) \tag{5}$$

- Zerlegen Felder in einfallenden und gestreuten Anteil
- Gesamte diel. Verschiebung ergibt sich zu:

$$\mathbf{D} \;=\; \mathbf{D}_i + \mathbf{D}_s \;=\; \epsilon_0 \left(\epsilon_{r0}\mathbb{1} + \delta\underline{\underline{\epsilon_r}}(\mathbf{r}, t)\right)(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s)$$

- Diel. Verschiebung des gestreuten Feldes hängt von einfallenden und gestreuten Anteilen des **E**-Feldes ab

$$\mathbf{D}_s \;=\; \epsilon_0\epsilon_{r0}\,\mathbf{E}_s + \epsilon_0\,\delta\underline{\underline{\epsilon_r}}\,\mathbf{E} \tag{6}$$

Grundlegende Theorie der Lichtstreuung

- Weiter muss gezeigt werden, dass $\mathbf{D}_s$ die inhomogene Wellengl. erfüllt

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}_s \;=\; i\omega\mu_0\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}_s$$

Grundlegende Theorie der Lichtstreuung

- Weiter muss gezeigt werden, dass $\mathbf{D}_s$ die inhomogene Wellengl. erfüllt

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}_s = i\omega\mu_0\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}_s$$

- Mit Hilfe der 4. Maxwell-Gleichung folgt

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}_s = \omega^2\mu_0\,\mathbf{D}_s$$

Grundlegende Theorie der Lichtstreuung

- Weiter muss gezeigt werden, dass $\mathbf{D}_s$ die inhomogene Wellengl. erfüllt

$$\text{rot rot } \mathbf{E}_s = i\omega\mu_0 \text{ rot } \mathbf{H}_s$$

- Mit Hilfe der 4. Maxwell-Gleichung folgt

$$\text{rot rot } \mathbf{E}_s = \omega^2 \mu_0 \mathbf{D}_s$$

- Wir formen in Gl. (6) $\mathbf{D}_s$ nach $\mathbf{E}_s$ um und setzen ein

$$\text{rot rot } \mathbf{D}_s - \epsilon_0 \text{ rot rot } \left(\delta \underline{\underline{\epsilon_r}} \, \mathbf{E} \right) = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_{r0} \mathbf{D}_s \qquad (7)$$

- Durch Umformen erhalten wir eine inhomogene Wellengl. für $\mathbf{D}_s$

$$\nabla^2 \mathbf{D}_s + k^2 \mathbf{D}_s = -\epsilon_0 \text{ rot rot } \left(\delta \underline{\underline{\epsilon_r}} \, \mathbf{E} \right) \qquad (8)$$

Grundlegende Theorie der Lichtstreuung

- Gl. (8) lässt sich mit dem HERTZ-Vektor Π umschreiben

$$\mathbf{D}_s = \text{rot rot}\,\Pi$$

- Es folgt:

$$\nabla^2\Pi + k^2\Pi = -\epsilon_0 \delta \underline{\underline{\epsilon_r}}\,\mathbf{E} \qquad (9)$$

Grundlegende Theorie der Lichtstreuung

- Gl. (8) lässt sich mit dem HERTZ-Vektor Π umschreiben

$$\mathbf{D}_s = \text{rot rot } \Pi$$

- Es folgt:

$$\nabla^2 \Pi + k^2 \Pi = -\epsilon_0 \delta \underline{\underline{\epsilon_r}} \, \mathbf{E} \tag{9}$$

- Dies ist eine inhomogene HELMHOLTZ-Gleichung. Sie kann gelöst werden zu:

$$\Pi(\mathbf{r}) = -\epsilon_0 \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \, G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \, \delta \underline{\underline{\epsilon_r'}} \, \mathbf{E}(\mathbf{r}') \tag{10}$$

mit der Greenfunktion

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp\{\pm ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\} \tag{11}$$

↬ *Helmholtz-Gl.*

Grundlegende Theorie der Lichtstreuung

- Näherung:

$$|\mathbf{R}-\mathbf{r}'| \approx R - \frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{R}}{R} = R - \mathbf{r}'\cdot\mathbf{k}_f^0$$

mit $\mathbf{k}_f^0$ der Einheitsvektor in Richtung des Detektors und R der Ort des Detektors.

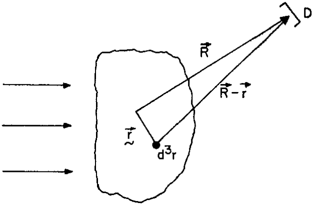


Abb. aus BERNE, PECORA *Dynamic Light Scattering*

- Daher folgt für die Greenfunktion (11)

$$G(\mathbf{R},\mathbf{r}') \approx \frac{1}{4\pi R}\exp\{ikR\}\cdot\exp\{-i\mathbf{k}_f\mathbf{r}'\} \tag{12}$$

mit $\mathbf{k}_f = \mathbf{k}_f^0 \cdot k$ Wellenvektor der Streustrahlung

Grundlegende Theorie der Lichtstreuung

- Näherung:

$$|\mathbf{R}-\mathbf{r}'| \approx R - \frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{R}}{R} = R - \mathbf{r}'\cdot\mathbf{k}_f^0$$

mit $\mathbf{k}_f^0$ der Einheitsvektor in Richtung des Detektors und R der Ort des Detektors.

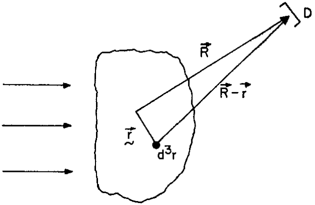


Abb. aus Berne, Pecora *Dynamic Light Scattering*

- Daher folgt für die Greenfunktion (11)

$$G(\mathbf{R},\mathbf{r}') \approx \frac{1}{4\pi R}\exp\{ikR\}\cdot\exp\{-i\mathbf{k}_f\mathbf{r}'\} \tag{12}$$

mit $\mathbf{k}_f = \mathbf{k}_f^0 \cdot k$ Wellenvektor der Streustrahlung

- Damit erhalten wir das gestreute Feld am Detektor

$$\mathbf{E}_s = -\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\frac{1}{4\pi R}\exp\{ikR\}\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}'\,\exp\{i\mathbf{k}_f\mathbf{r}'\}\,\frac{1}{\epsilon_{r0}}\,\delta\underline{\underline{\epsilon'_r}}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}')$$

Grundlegende Theorie der Lichtstreuung

- Müssen rot nur auf **R**-abhängige Terme anwenden, daher definiere $\int \ldots = \mathbf{a}$. Weiterhin sei $R \gg 1$

$$\text{rot rot}\left(\frac{1}{4\pi R}\exp\{ikR\}\mathbf{a}\right) \approx -\frac{1}{4\pi R}\exp\{ikR\}\mathbf{k}_f \times (\mathbf{k}_f \times \mathbf{a})$$

Grundlegende Theorie der Lichtstreuung

- Müssen rot nur auf **R**-abhängige Terme anwenden, daher definiere $\int \ldots = \mathbf{a}$. Weiterhin sei $R \gg 1$

$$\text{rot rot}\left(\frac{1}{4\pi R}\exp\{ikR\}\mathbf{a}\right) \approx -\frac{1}{4\pi R}\exp\{ikR\}\mathbf{k}_f \times (\mathbf{k}_f \times \mathbf{a})$$

Es ergibt sich für das gestreute Feld:

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi R}\exp\{ikR\}k^2 \int \mathrm{d}^3r' \, \exp\{i\mathbf{k}_f\mathbf{r}'\} \cdot \left[\mathbf{k}_f^0 \times \left(\mathbf{k}_f^0 \times \frac{1}{\epsilon_{r0}}\,\delta\underline{\underline{\epsilon_r'}}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}')\right)\right] \qquad (13)$$

- Streufeld ist Produkt von einer sphärischen Welle und einer winkelabhängigen Amplitude
- Mit $k = \frac{\omega}{c}$ ergibt sich eine ω^2-Abhängigkeit beim Streufeld und somit eine ω^4-Abhängigkeit bei der Intensität $\Rightarrow$ Rayleigh-Streuung

Born-Näherung

- Bei Lösung von $\mathbf{E}_s$ steht das gesamte $\mathbf{E}$-Feld unter dem Integral
  $\Rightarrow$ Integralgleichung des gestreuten Feldes

BORN-Näherung

- Bei Lösung von $\mathbf{E}_s$ steht das gesamte $\mathbf{E}$-Feld unter dem Integral
  $\Rightarrow$ Integralgleichung des gestreuten Feldes
- BORN-Näherung:
  Betrachten nur Einfachstreuung, Mehrfachstreuung wird vernachlässigt
  $\Rightarrow$ Streuung der kolloiden Suspension muss schwach sein
- Damit kann $\mathbf{E}$-Feld unter Integral geschrieben werden als:

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) \;=\; E_0\,\mathbf{n}_i\;\exp\{i(\mathbf{k}_i\mathbf{r} - \omega t)\}$$

  mit $\mathbf{n}_i$ Einheitsvektor in Richtung der Polarisation des einfallenden Feldes

Born-Näherung

- Annahme: Phase ändert sich um gleichen Wert bei Streuung an kolloidem Teilchen wie wenn es durch Medium hindurch geht
- Phasenänderung bei Teilchen mit Durchmesser σ und Brechungsindex n_p wird beschrieben durch

$$k_\sigma = 2\pi \frac{n_p}{\lambda_0}$$

mit λ_0 Vakuumwellenlänge. Ebenso für Lösung mit Brechungsindex n_l:

$$k_\sigma = 2\pi \frac{n_l}{\lambda_0}$$

BORN-Näherung

- Annahme: Phase ändert sich um gleichen Wert bei Streuung an kolloidem Teilchen wie wenn es durch Medium hindurch geht
- Phasenänderung bei Teilchen mit Durchmesser σ und Brechungsindex n_p wird beschrieben durch

$$k_\sigma = 2\pi \frac{n_p}{\lambda_0}$$

mit λ_0 Vakuumwellenlänge. Ebenso für Lösung mit Brechungsindex n_l:

$$k_\sigma = 2\pi \frac{n_l}{\lambda_0}$$

- Unterschied der Phasenänderung muss klein gegen 1 sein. Definiere Wellenlänge in der Lösung zu $\lambda = \lambda_0 / n_l$

$$2\pi \frac{\sigma}{\lambda} \left(\frac{n_p}{n_l} - 1 \right) \ll 1$$

Diese Ungleichung führt auf die RAYLEIGH-GANS-DEBYE-Beziehung

BORN-Näherung

- Mit diesen Näherungen lässt sich Gl. (13) umformen zu

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_s(\mathbf{R},t) &= E_0\frac{1}{4\pi R}\exp\{i(kR-\omega t)\}k^2\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\cdot \\ &\left[\mathbf{k}_f^0\times\left(\mathbf{k}_f^0\times\frac{1}{\epsilon_{r0}}\,\delta\underline{\underline{\epsilon_r}}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{n}_i\right)\right]\exp\{-i(\mathbf{k}_f-\mathbf{k}_i)\mathbf{r}\} \quad (14)\end{aligned}$$

BORN-Näherung

- Mit diesen Näherungen lässt sich Gl. (13) umformen zu

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_s(\mathbf{R},t) \;=\;& E_0 \frac{1}{4\pi R} \exp\{i(kR-\omega t)\} k^2 \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\, \cdot \\
& \left[\mathbf{k}_f^0 \times \left(\mathbf{k}_f^0 \times \frac{1}{\epsilon_{r0}}\, \delta\underline{\underline{\epsilon_r}}(\mathbf{r},t)\cdot \mathbf{n}_i\right)\right] \exp\{-i(\mathbf{k}_f-\mathbf{k}_i)\mathbf{r}\} \quad (14)
\end{aligned}
$$

- Differenz zwischen einfallendem und gestreutem Vektor ist Streuvektor

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i$$

- Der Betrag des Streuvektors berechnet sich zu

$$q \;=\; 2k \sin\frac{\theta}{2} \;=\; \frac{4\pi}{\lambda} \sin\frac{\theta}{2}$$

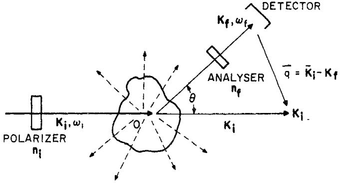


Abb. aus BERNE, PECORA *Dynamic Light Scattering*

BORN-Näherung

- In Streuexperiment beschreiben Einfalls- und Endwellenvektor die Streuebene

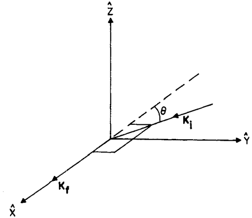


Abb. aus BERNE, PECORA *Dynamic Light Scattering*

BORN-Näherung

- In Streuexperiment beschreiben Einfalls- und Endwellenvektor die Streuebene

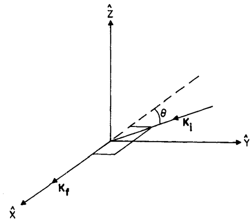


Abb. aus BERNE, PECORA *Dynamic Light Scattering*

- Wir betrachten im Folgenden Komponente des Streufeldes entlang einer Richtung $\mathbf{n}_f$

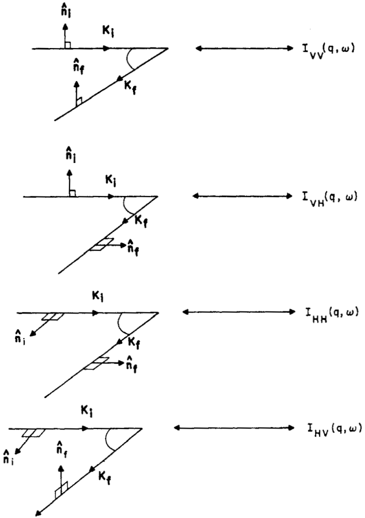


Abb. aus BERNE, PECORA *Dynamic Light Scattering*

Born-Näherung

- Damit folgt:

$$\begin{aligned} E_s(\mathbf{R},t) &= \mathbf{n}_f \cdot \mathbf{E}_s(\mathbf{R},t) = E_0 \frac{1}{4\pi R} \exp\{i(kR-\omega t)\}\, k^2 \cdot \\ &\quad \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\, \delta\epsilon_{if}(\mathbf{r},t) \exp\{-i\mathbf{q}\mathbf{r}\} \end{aligned} \tag{15}$$

mit

$$\delta\epsilon_{if}(\mathbf{r},t) = \mathbf{n}_f \cdot \frac{1}{\epsilon_{r0}} \underline{\underline{\epsilon_r}}(\mathbf{r},t) \cdot \mathbf{n}_i \tag{16}$$

BORN-Näherung

- Fluktuationen entstehen durch Präsenz der kolloiden Teilchen und durch Fluktuationen innerhalb der Lösung
- In Abhängigkeit von der Position $\mathbf{r}$ nimmt $\delta\epsilon_{if}$ die Werte an:

$$\delta\epsilon_{if}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\epsilon_{r0}} \begin{cases} \epsilon_p(\mathbf{r},t) - \epsilon_{r0} & \text{innerhalb der Teilchen} \\ \epsilon_l(\mathbf{r},t) - \epsilon_{r0} & \text{innerhalb der Lösung} \end{cases}$$

Born-Näherung

- Fluktuationen entstehen durch Präsenz der kolloiden Teilchen und durch Fluktuationen innerhalb der Lösung
- In Abhängigkeit von der Position $\mathbf{r}$ nimmt $\delta\epsilon_{if}$ die Werte an:

$$\delta\epsilon_{if}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\epsilon_{r0}} \begin{cases} \epsilon_p(\mathbf{r},t) - \epsilon_{r0} & \text{innerhalb der Teilchen} \\ \epsilon_l(\mathbf{r},t) - \epsilon_{r0} & \text{innerhalb der Lösung} \end{cases}$$

- Fluktuationen der diel. Konstanten in der Lösung führen zu Brillouin- und Rayleigh-Streuung
- Streuintensitäten aufgrund dieser Effekte sind fast immer klein gegen $\epsilon_p(\mathbf{r},t) - \epsilon_l$

BORN-Näherung

Es ergibt sich für das Streufeld:

$$E_s(\mathbf{q}, t) = \frac{E_0}{4\pi R} \exp\{i(kR - \omega t)\}\, k^2 \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\, \delta\epsilon(\mathbf{r}, t) \exp\{-i\mathbf{q}\mathbf{r}\} \tag{17}$$

mit

$$\delta\epsilon(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_{r0}}(\epsilon_p(\mathbf{r}, t) - \epsilon_l) \tag{18}$$

Born-Näherung

Es ergibt sich für das Streufeld:

$$E_s(\mathbf{q}, t) = \frac{E_0}{4\pi R} \exp\{i(kR - \omega t)\}\, k^2 \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\, \delta\epsilon(\mathbf{r}, t)\, \exp\{-i\mathbf{q}\mathbf{r}\} \tag{17}$$

mit

$$\delta\epsilon(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_{r0}}(\epsilon_p(\mathbf{r}, t) - \epsilon_l) \tag{18}$$

- In homogenem Medium keine Streuung möglich
- Gestreutes Feld wird in Abhängigkeit von $\mathbf{q}$ angegeben

Diskrete Streuobjekte

- Das Integral in Gl. (17) hat Beiträge von N Teilchen im Streuvolumen
- Definiere

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}_j + \mathbf{r}_j$$

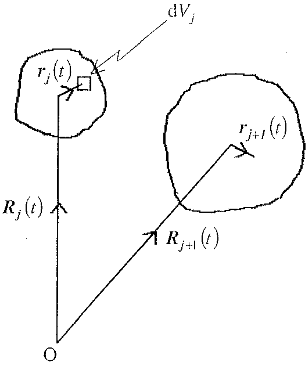


Abb. aus LINDER, ZEMB: *Neutrons, X-Rays and Light*

Diskrete Streuobjekte

- Damit wird Gl. (17) zu:

$$E_s(\mathbf{q},t) = \frac{E_0}{R}\exp\{i(kR-\omega t)\}\sum_{j=1}^{N}\exp\{-i\mathbf{q}\mathbf{R}_j\}\frac{k^2}{4\pi}\int_{V_j}\mathrm{d}^3\mathbf{r}_j\delta\epsilon(\mathbf{r},t)\exp\{-\mathbf{q}\mathbf{r}_j\}$$

- Der Anteil

$$b_j(\mathbf{q},t) = \frac{k^2}{4\pi}\int_{V_j}\mathrm{d}^3\mathbf{r}_j\,\delta\epsilon(\mathbf{r},t)\exp\{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_j\} \tag{19}$$

wird als Streuamplitude des j-ten Teilchen bezeichnet.

Diskrete Streuobjekte

- Damit wird Gl. (17) zu:

$$E_s(\mathbf{q},t) = \frac{E_0}{R}\exp\{i(kR - \omega t)\}\sum_{j=1}^{N}\exp\{-i\mathbf{q}\mathbf{R}_j\}\frac{k^2}{4\pi}\int_{V_j} \mathrm{d}^3\mathbf{r}_j \delta\epsilon(\mathbf{r},t)\exp\{-\mathbf{q}\mathbf{r}_j\}$$

- Der Anteil

$$b_j(\mathbf{q},t) = \frac{k^2}{4\pi}\int_{V_j} \mathrm{d}^3\mathbf{r}_j\, \delta\epsilon(\mathbf{r},t)\exp\{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_j\} \tag{19}$$

wird als Streuamplitude des j-ten Teilchen bezeichnet.

Es folgt:

$$E_s(\mathbf{q},t) = \frac{E_0}{R}\exp\{i(kR - \omega t)\}\sum_{j=1}^{N} b_j(\mathbf{q},t)\, \exp\{-i\mathbf{q}\mathbf{R}_j\} \tag{20}$$

- Das gestreute Feld ist die Summe der Felder gestreut an den individuellen Teilchen

Diskrete Streuobjekte

- Wollen Intensität anstelle des gestreuten Feldes messen
- Zusammenhang zwischen Intensität und Feld:

$$I(\mathbf{q}, t) = |E(\mathbf{q}, t)|^2$$

Damit ergibt sich aus Gl. (20):

$$I_s(\mathbf{q}, t) = \frac{E_0^2}{R^2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} b_j(\mathbf{q}, t) b_k^*(\mathbf{q}, t) \exp\{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{R}_j(t) - \mathbf{R}_k(t))\} \quad (21)$$

Diskrete Streuobjekte

- Wollen Intensität anstelle des gestreuten Feldes messen
- Zusammenhang zwischen Intensität und Feld:

$$I(\mathbf{q}, t) = |E(\mathbf{q}, t)|^2$$

Damit ergibt sich aus Gl. (20):

$$I_s(\mathbf{q}, t) = \frac{E_0^2}{R^2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} b_j(\mathbf{q}, t) b_k^*(\mathbf{q}, t) \exp\{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{R}_j(t) - \mathbf{R}_k(t))\} \quad (21)$$

- Für ergodische Systeme kann Zeitmittel durch Gesamtheitsmittel ersetzt werden:

$$\langle I_s(\mathbf{q}, t) \rangle = \frac{E_0^2}{R^2} \left\langle \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} b_j(\mathbf{q}) b_k^*(\mathbf{q}) \exp\{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_k)\} \right\rangle \quad (22)$$

Verdünnte Systeme

- In verdünnten Systemen sind Teilchen weit von einander entfernt und verhalten sich unkorreliert

$$\langle I_s(q)\rangle = \sum_{j=1}^{N} \left\langle |b_j(\mathbf{q})|^2 \right\rangle + \sum_{j\neq}^{N} \sum_{k=1}^{N} \langle b_j(\mathbf{q}) \exp\{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}_j\}\rangle \langle b_k^*(\mathbf{q}) \exp\{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}_k\}\rangle$$

Verdünnte Systeme

- In verdünnten Systemen sind Teilchen weit von einander entfernt und verhalten sich unkorreliert

$$\langle I_s(q)\rangle = \sum_{j=1}^{N} \left\langle |b_j(\mathbf{q})|^2 \right\rangle + \sum_{j\neq}^{N} \sum_{k=1}^{N} \langle b_j(\mathbf{q}) \exp\{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}_j\}\rangle \langle b_k^*(\mathbf{q}) \exp\{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}_k\}\rangle$$

- Teilchen j kann über die Zeit jede Position in der Lösung unabhängig von den anderen Teilchen einnehmen

$$\langle I_s(q)\rangle = \sum_{j=1}^{N} \left\langle |b_j(\mathbf{q})|^2 \right\rangle$$

- Eine Messung liefert Informationen über Größe, Struktur und Form der Teilchen
- Bei gleichen Teilchen folgt:

$$\langle I_s(q)\rangle = N \langle |b(\mathbf{q})|^2 \rangle$$

Verdünnte Systeme

- Vorherige Gleichung kann umgeschrieben werden zu:

$$\langle I_s(q)\rangle = N\langle|b(0)|^2\rangle P(q) \quad \text{mit} \quad P(q) = \frac{\langle|b(\mathbf{q})|^2\rangle}{\langle|b(0)|^2\rangle}$$

- $P(q)$ ist der Formfaktor und gibt Informationen über die Struktur der einzelnen Teilchen
- $\langle|b(0)|^2\rangle$ ist der Kontrast und beschreibt wie stark die Strahlung an das streuende Medium ankoppelt

$$b(0) \propto \frac{1}{n_0}\,(n_p - n_l)\,V_p$$

Beispiel: Formfaktor einer homogenen Kugel

- Für homogenes kugelförmiges Teilchen folgt aus Gl. (19)

$$b(\mathbf{q}) \;=\; \frac{k^2}{4\pi}\,\delta\epsilon \int_{\text{Kugel}} \exp\{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}\}\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}$$

- Die Lösung ist gegeben durch

$$b(q) \;=\; \frac{k^2}{4\pi}\,\delta\epsilon\frac{4\pi}{3}R^3\,\frac{3}{(qR)^3}\,(\sin qR - qR\cos qR)$$

Beispiel: Formfaktor einer homogenen Kugel

- Für homogenes kugelförmiges Teilchen folgt aus Gl. (19)

$$b(\mathbf{q}) \;=\; \frac{k^2}{4\pi}\,\delta\epsilon \int_{\text{Kugel}} \exp\{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}\}\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}$$

- Die Lösung ist gegeben durch

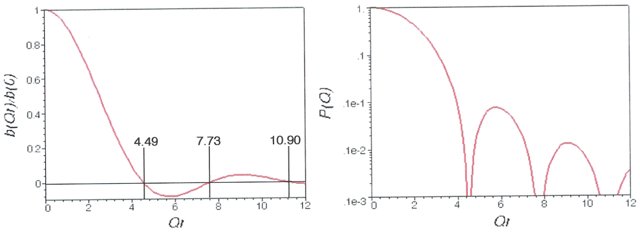
$$b(q) \;=\; \frac{k^2}{4\pi}\,\delta\epsilon\frac{4\pi}{3}R^3\frac{3}{(qR)^3}\,(\sin qR - qR\cos qR)$$

- Damit erhalten wir den Formfaktor einer homogenen Kugel

$$P(q) \;=\; \left[\frac{3}{(qR)^3}\,(\sin qR - qR\cos qR)\right]^2$$

mit Nullstellen bei $\tan qR = qR = 4.49, 7.73, \ldots$

Beispiel: Formfaktor einer homogenen Kugel



Konzentrierte Systeme

- Die durchschnittlich gestreute Intensität ist aus Gl. (22) bekannt:

$$\langle I_s(\mathbf{q}, t)\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} b_j(\mathbf{q}) b_k^*(\mathbf{q}) \exp\{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_k)\} \right\rangle$$

Konzentrierte Systeme

- Die durchschnittlich gestreute Intensität ist aus Gl. (22) bekannt:

$$\langle I_s(\mathbf{q},t)\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} b_j(\mathbf{q})b_k^*(\mathbf{q}) \exp\{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_k)\}\right\rangle$$

- Annahme: alle Teilchen sind identische homogene Kugeln $b_j(\mathbf{q}) = b(q)$

$$\langle I_s(\mathbf{q},t)\rangle = b^2(q)\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \langle\exp\{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_k)\}\rangle = Nb^2(0)P(q)S(q) \tag{23}$$

- $S(q)$ ist der Strukturfaktor, definiert als:

$$S(q) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \langle\exp\{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_k)\}\rangle \tag{24}$$

Konzentrierte Systeme

- $Nb^2(0)P(q)$ beschreibt Streuung von N unkorrelierten Teilchen
- Der Strukturfaktor beschreibt die Modifikation der Intensität durch räumliche Korrelation

Konzentrierte Systeme

- $Nb^2(0)P(q)$ beschreibt Streuung von N unkorrelierten Teilchen
- Der Strukturfaktor beschreibt die Modifikation der Intensität durch räumliche Korrelation
- Räumliche Korrelationen lassen sich in konzentrierten Systemen gut mit Hilfe der Paarverteilungsfunktion beschreiben
- Zusammenhang zwischen Strukturfaktor und Paarverteilungsfunktion:

$$S(q) = 1 + 4\pi \frac{N}{V} \int_0^\infty [g(R) - 1] R^2 \frac{\sin qR}{qR} \, \mathrm{d}R \tag{25}$$

und durch Fouriertransformation

$$g(R) = 1 + \frac{1}{2\pi^2} \frac{V}{N} \int_0^\infty [S(q) - 1] q^2 \frac{\sin qR}{qR} \, \mathrm{d}q \tag{26}$$

Konzentrierte Systeme

- Betrachte zuerst verdünntes System, so dass $S(q) = 1$. Damit

$$\langle I_s(q) \rangle_{\mathrm{dil}} = N_{\mathrm{dil}} b^2(0) P(q)$$

- Betrachte dann konzentriertes System

$$\langle I_s(q) \rangle_{\mathrm{conc}} = N_{\mathrm{conc}} b^2(0) P(q) S(q)$$

- Strukturfaktor ergibt sich aus dem Verhältnis dieser beiden Messungen

$$S(q) = \frac{\langle I_S(q) \rangle_{\mathrm{conc}}}{\langle I_S(q) \rangle_{\mathrm{dil}}} \frac{N_{\mathrm{dil}}}{N_{\mathrm{conc}}}$$

Konzentrierte Systeme

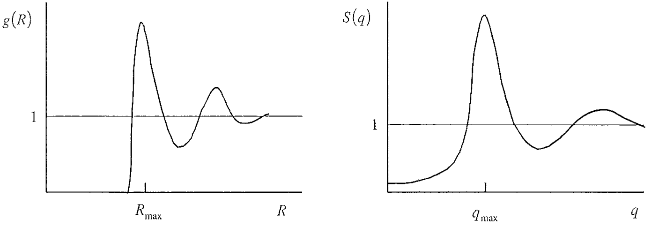


Abb. aus Linder, Zemb: *Neutrons, X-Rays and Light*

Einführung in die Dynamische Lichtstreuung

- Betrachten eine Suspension kolloider Teilchen, die mit kohärentem Licht bestrahlt werden
- Im Fernfeld lassen sich zu jedem Zeitpunkt Punkte höherer und niedrigerer Intensität beobachten
- Dies nennt man ein Speckle-Muster
- Das Speckle ändert sich zeitlich auf Grund von BROWN'scher Bewegung der Teilchen

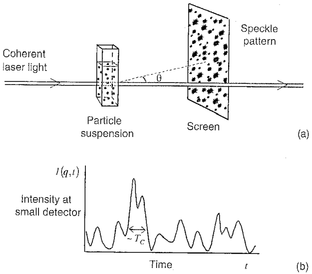


Abb. aus LINDER, ZEMB: *Neutrons, X-Rays and Light*

Einführung in die Dynamische Lichtstreuung

- Mit Hilfe der Zeit-Autokorrelationsfunktion kann man bei der Dynamischen Lichtstreuung (DLS) Information aus der fluktuierenden Intensität gewinnen

$$\langle I(\mathbf{q},0)I(\mathbf{q},\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, I(\mathbf{q},t)I(\mathbf{q},t+\tau)$$

Einführung in die Dynamische Lichtstreuung

- Mit Hilfe der Zeit-Autokorrelationsfunktion kann man bei der Dynamischen Lichtstreuung (DLS) Information aus der fluktuierenden Intensität gewinnen

$$\langle I(\mathbf{q},0)I(\mathbf{q},\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, I(\mathbf{q},t)I(\mathbf{q},t+\tau)$$

- Dabei gibt es zwei Grenzwerte:
  - Bei keiner Zeitverschiebung des zweiten Signals zum ersten ($\tau = 0$)

$$\lim_{\tau\to 0}\langle I(\mathbf{q},0)I(\mathbf{q},\tau)\rangle = \langle I^2(\mathbf{q})\rangle$$

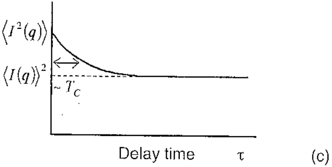


Abb. aus Linder, Zemb: *Neutrons, X-Rays and Light*

  - Bei großer Zeitverschiebung ($\tau \to \infty$)

$$\lim_{\tau\to\infty}\langle I(\mathbf{q},0)I(\mathbf{q},\tau)\rangle = \langle I(\mathbf{q},0)\rangle\langle I(\mathbf{q},\tau)\rangle = \langle I(\mathbf{q})\rangle^2$$

Siegert-Relation und dynamischer Strukturfaktor

- Um die Eigenschaften des fluktierenden Streufeldes zu untersuchen, greifen wir auf Gl. (20) zurück

$$E_s(\mathbf{q}, t) = \frac{E_0}{R} \exp\{i(kR - \omega t)\} \sum_{j=1}^{N} b_j(\mathbf{q}, t) \exp\{-i\mathbf{q}\mathbf{R}_j\}$$

- Vorfaktor fällt durch Normierung weg. $\mathbf{R}_j$ ist Gauss-verteilte Zufallsvariable [1].

[1] siehe Vortrag von Simon Schnyder

Siegert-Relation und dynamischer Strukturfaktor

- Um die Eigenschaften des fluktierenden Streufeldes zu untersuchen, greifen wir auf Gl. (20) zurück

$$E_s(\mathbf{q},t) \;=\; \frac{E_0}{R}\,\exp\{i(kR-\omega t)\}\sum_{j=1}^{N} b_j(\mathbf{q},t)\,\exp\{-i\mathbf{q}\mathbf{R}_j\}$$

- Vorfaktor fällt durch Normierung weg. $\mathbf{R}_j$ ist Gauss-verteilte Zufallsvariable [1]. Es folgt:

$$E_s(\mathbf{q},t) \;=\; \sum_{i=1}^{N}\exp\{-i\mathbf{q}\mathbf{R}_j(t)\} \tag{27}$$

- Bei Photonen-Korrelations-Experiment wird normierte Intensitätskorrelationsfunktion bestimmt

$$g^{(2)}(q,\tau) \;=\; \frac{\langle I(\mathbf{q},0)I(\mathbf{q},\tau)\rangle}{\langle I(\mathbf{q})\rangle^2} \tag{28}$$

[1] siehe Vortrag von Simon Schnyder

Siegert-Relation und dynamischer Strukturfaktor

- Wir betrachten den Nenner aus Gl. (28)

$$\langle I(\mathbf{q},0)I(\mathbf{q},\tau)\rangle = \left\langle |E_s(\mathbf{q},0)|^2 \, |E_s(\mathbf{q},\tau)|^2 \right\rangle$$

- Hier unterscheiden wir zwei Fälle:
  1. Für nicht wechselwirkende Kolloidteilchen ist E_s Funktion der GAUSS-verteilten Zufallsvariablen $\mathbf{R}_j$ und daher selbst GAUSS-verteilt.

[2] siehe Vortrag von Simon Schnyder

Siegert-Relation und dynamischer Strukturfaktor

- Wir betrachten den Nenner aus Gl. (28)

$$\langle I(\mathbf{q},0)I(\mathbf{q},\tau)\rangle = \left\langle |E_s(\mathbf{q},0)|^2 \, |E_s(\mathbf{q},\tau)|^2 \right\rangle$$

- Hier unterscheiden wir zwei Fälle:
  1. Für nicht wechselwirkende Kolloidteilchen ist E_s Funktion der GAUSS-verteilten Zufallsvariablen $\mathbf{R}_j$ und daher selbst GAUSS-verteilt.
  2. Für wechselwirkende Kolloide betrachten wir Subvolumina des Streuvolumens

$$E_s = \sum_n E_n^{(s)}$$

[2] siehe Vortrag von Simon Schnyder

Siegert-Relation und dynamischer Strukturfaktor

- Wir betrachten den Nenner aus Gl. (28)

$$\langle I(\mathbf{q},0)I(\mathbf{q},\tau)\rangle = \left\langle |E_s(\mathbf{q},0)|^2 \, |E_s(\mathbf{q},\tau)|^2 \right\rangle$$

- Hier unterscheiden wir zwei Fälle:
  1. Für nicht wechselwirkende Kolloidteilchen ist E_s Funktion der Gauss-verteilten Zufallsvariablen $\mathbf{R}_j$ und daher selbst Gauss-verteilt.
  2. Für wechselwirkende Kolloide betrachten wir Subvolumina des Streuvolumens

$$E_s = \sum_n E_n^{(s)}$$

     Wähle Subvolumina so, dass Bewegungen in einem, unabhängig von Bewegungen in den anderen sind. Damit ist E_s Summe unabhängiger Zufallsvariablen und nach dem zentralen Grenzwertsatz [2] Gauss-verteilt.

[2] siehe Vortrag von Simon Schnyder

Siegert-Relation und dynamischer Strukturfaktor

- Daher ist E_s Gauss-verteilte Zufallsvariable und

$$\langle I(q,0)I(q,\tau)\rangle = \langle E_s^*(q,0)E_s(q,0)E_s^*(q,\tau)E_s(q,\tau)\rangle$$

ist viertes Moment der Gauss-Verteilung.

Siegert-Relation und dynamischer Strukturfaktor

- Daher ist E_s Gauss-verteilte Zufallsvariable und

$$\langle I(q,0)I(q,\tau)\rangle = \langle E_s^*(q,0)E_s(q,0)E_s^*(q,\tau)E_s(q,\tau)\rangle$$

  ist viertes Moment der Gauss-Verteilung.
- Das vierte Moment kann vollständig durch zwei Momente beschrieben werden:

$$\langle X_p X_q X_r X_s\rangle = \langle X_p X_q\rangle\langle X_r X_s\rangle + \langle X_p X_r\rangle\langle X_q X_s\rangle + \langle X_p X_s\rangle\langle X_q X_r\rangle$$

Siegert-Relation und dynamischer Strukturfaktor

- Daher ist E_s GAUSS-verteilte Zufallsvariable und

$$\langle I(q,0)I(q,\tau)\rangle = \langle E_s^*(q,0)E_s(q,0)E_s^*(q,\tau)E_s(q,\tau)\rangle$$

ist viertes Moment der GAUSS-Verteilung.

- Das vierte Moment kann vollständig durch zwei Momente beschrieben werden:

$$\langle X_p X_q X_r X_s\rangle = \langle X_p X_q\rangle\langle X_r X_s\rangle + \langle X_p X_r\rangle\langle X_q X_s\rangle + \langle X_p X_s\rangle\langle X_q X_r\rangle$$

- Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\langle I(q,0)I(q,\tau)\rangle &= \langle |E_s(q,0)|^2\rangle\langle |E_s(q,\tau)|^2\rangle \\ &+\langle E_s^*(q,0)E_s^*(q,\tau)\rangle\langle E_s(q,0)E_s(q,\tau)\rangle \\ &+\langle E_s^*(q,0)E_s(q,\tau)\rangle\langle E_s(q,0)E_s^*(q,\tau)\rangle\end{aligned}$$

Siegert-Relation und dynamischer Strukturfaktor

- Erste Zeile liefert:

$$\langle |E_s(q,0)|^2\rangle\langle |E_s(q,\tau)|^2\rangle = \langle I(q,0)\rangle\langle I(q,\tau)\rangle = \langle I(q)\rangle^2$$

da gemittelte Streuintensität für Gleichgewichtssystem unabhängig ist

Siegert-Relation und dynamischer Strukturfaktor

- Erste Zeile liefert:

$$\langle |E_s(q,0)|^2\rangle\langle |E_s(q,\tau)|^2\rangle = \langle I(q,0)\rangle\langle I(q,\tau)\rangle = \langle I(q)\rangle^2$$

da gemittelte Streuintensität für Gleichgewichtssystem unabhängig ist

- Zweite Zeile liefert:

$$\langle E_s^*(q,0)E_s^*(q,\tau)\rangle = \sum_{j,k}\langle \exp\{i\mathbf{q}(\mathbf{R}_j(0)+\mathbf{R}_k(\tau))\}\rangle = 0$$

für ein translationsinvariantes Gleichgewichtssystem

Siegert-Relation und dynamischer Strukturfaktor

- Erste Zeile liefert:

$$\langle|E_s(q,0)|^2\rangle\langle|E_s(q,\tau)|^2\rangle = \langle I(q,0)\rangle\langle I(q,\tau)\rangle = \langle I(q)\rangle^2$$

  da gemittelte Streuintensität für Gleichgewichtssystem unabhängig ist
- Zweite Zeile liefert:

$$\langle E_s^*(q,0)E_s^*(q,\tau)\rangle = \sum_{j,k}\langle\exp\{i\mathbf{q}(\mathbf{R}_j(0)+\mathbf{R}_k(\tau))\}\rangle = 0$$

  für ein translationsinvariantes Gleichgewichtssystem
- Dritte Zeile liefert die Feldkorrelationsfunktion:

$$g^{(1)}(q,\tau) = \frac{\langle E_s^*(q,0)E_s(q,\tau)\rangle}{\langle I_s(q)\rangle}$$

Siegert-Relation und dynamischer Strukturfaktor

- Damit ergibt sich die

Siegert-Relation

$$g^{(2)}(q,\tau) = 1 + |g^{(1)}(q,\tau)|^2 \tag{29}$$

Siegert-Relation und dynamischer Strukturfaktor

- Damit ergibt sich die

SIEGERT-Relation

$$g^{(2)}(q,\tau) \;=\; 1 + |g^{(1)}(q,\tau)|^2 \tag{29}$$

- Nach Gl. (27) gilt

$$\langle E_s^*(q,0)E_s(q,\tau)\rangle \;=\; \sum_{j,k}\langle \exp\{-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{R}_j(0)-\mathbf{R}_k(\tau))\}\rangle$$

  was Verallgemeinerung des statischen Strukturfaktors ist

$$S(q) \;=\; \frac{1}{N}\sum_{j,k}\langle \exp\{-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{R}_j-\mathbf{R}_k)\}\rangle$$

- $S(q)$ ist Maß für die Korrelation der Orte $\mathbf{R}_j, \mathbf{R}_k$ zur selben Zeit

Siegert-Relation und dynamischer Strukturfaktor

- Für die Beschreibung der Korrelationen des Orts $\mathbf{R}_j(0)$ zur Zeit 0 mit den Ort $\mathbf{R}_k(\tau)$ zur Zeit τ definiert man den

Dynamischen Strukturfaktor

$$S(q,\tau) = \frac{1}{N}\sum_{j,k}\langle \exp\{-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{R}_j(0)-\mathbf{R}_k(\tau))\}\rangle \tag{30}$$

- Es gilt der Zusammenhang

$$S(q,\tau=0) = S(q)$$

Berechnung von $S(q)$ für unabhängige Teilchen

- Da j und k für $j \neq k$ unkorreliert sind, verbleiben in Gl. (30) nur Terme mit $j = k$:

$$S(q,\tau) = \langle \exp\{-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{R}_j(0) - \mathbf{R}_j(\tau))\}\rangle = \langle \exp\{i\mathbf{q} \cdot \Delta\mathbf{R}(\tau)\}\rangle$$

mit $\Delta\mathbf{R}(\tau) = \mathbf{R}(\tau) - \mathbf{R}(0)$ eine Gauss-verteilte Zufallsvariable

Berechnung von $S(q)$ für unabhängige Teilchen

Eindimensional gilt:

- GAUSS-Verteilung:

$$p(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi\langle\Delta x^2\rangle)^{1/2}}\;\exp\left\{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{2\langle\Delta x^2\rangle}\right\}$$

- Normierung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, p(x) \;=\; 1$$

- Mittelwert von x:

$$\langle x\rangle \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x\, p(x)$$

- Mittlere quadratische Abweichung:

$$\langle\Delta x^2\rangle \;=\; \langle(x-\langle x\rangle)^2\rangle \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\,(x-\langle x\rangle)^2\, p(x)$$

Berechnung von $S(q)$ für unabhängige Teilchen

- In unserem Beispiel ist $\Delta x := x - \langle x \rangle$. Damit folgt:

$$\langle \exp\{iq\Delta x\} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \exp\{iq\Delta x\} \, p(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2} q^2 \langle \Delta x^2 \rangle\right\}$$

Berechnung von $S(q)$ für unabhängige Teilchen

- In unserem Beispiel ist $\Delta x := x - \langle x \rangle$. Damit folgt:

$$\langle \exp\{iq\Delta x\} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \exp\{iq\Delta x\} \, p(x) = \exp\left\{ -\frac{1}{2} q^2 \langle \Delta x^2 \rangle \right\}$$

- Für 3 Dimensionen erhalten wir:

$$\langle \exp\{iq \cdot \Delta R\} \rangle = \exp\left\{ -\frac{1}{6} q^2 \langle \Delta \mathbf{R}^2(\tau) \rangle \right\}$$

- Dabei ist $\langle \Delta \mathbf{R}^2(\tau) \rangle$ das mittlere Verschiebungsquadrat während der Zeit τ und für Diffusionsprozess

$$\langle \Delta \mathbf{R}^2(\tau) \rangle = 6D\tau$$

wobei D der Diffusionskoeffizient ist

Berechnung von $S(q)$ für unabhängige Teilchen

- Wir erhalten für den dynamischen Strukturfaktor

$$S(q,\tau) \;=\; \exp\{-q^2 D\tau\}$$

- Der Diffusionskoeffizient ist über die Stokes-Einstein-Relation gegeben:

$$D \;=\; \frac{k_B T}{6\pi\eta R}$$

- Das DLS-Experiment liefert also D und damit auch den Radius

Zusammenfassung

- Für Lichtstreuexperimente werden Fluktuationen im Medium benötigt
- Das gestreute Feld ist die Summe der Felder gestreut an den individuellen Teilchen
- Gemessen wird bei Lichtstreuexperimenten die Intensität
- Strukturfaktor kann aus Lichtstreuexperimenten bestimmt werden und ist mit der Paarverteilungsfunktion verknüpft
- Statischer Strukturfaktor ist Spezialfall ($\tau = 0$) des dynamischen Strukturfaktors
- Dynamische Lichtstreuung liefert den Diffusionskoeffizienten des Teilchens

Literatur

- P. Lindner, Th. Zemb
  Neutrons, X-Rays and Light
- B. Berne, R. Pecora
  Dynamic Light Scattering
- R. Klein
  Vorlesungsskript

Helmholtzgleichung

- Eine Gl. der Art
$$(\nabla^2 + k^2)\Phi(\mathbf{r}) \;=\; -4\pi\rho(\mathbf{r})$$
wird durch die Helmholtz-Gl. gelöst.
- Zur Lösung betrachten wir zunächst
$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r}) \;=\; -4\pi\delta(\mathbf{r})$$
- Die Greenfunktion zum Differentialoperator $D_{op} = (\nabla^2 + k^2)$ ist gegeben durch:
$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') \;=\; \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\;\exp\{\pm ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\}$$
- Damit ergibt sich als Lösung für die obige Gl.
$$\Phi(\mathbf{r}) \;=\; \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}'\; G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')$$

↬ *zurück*